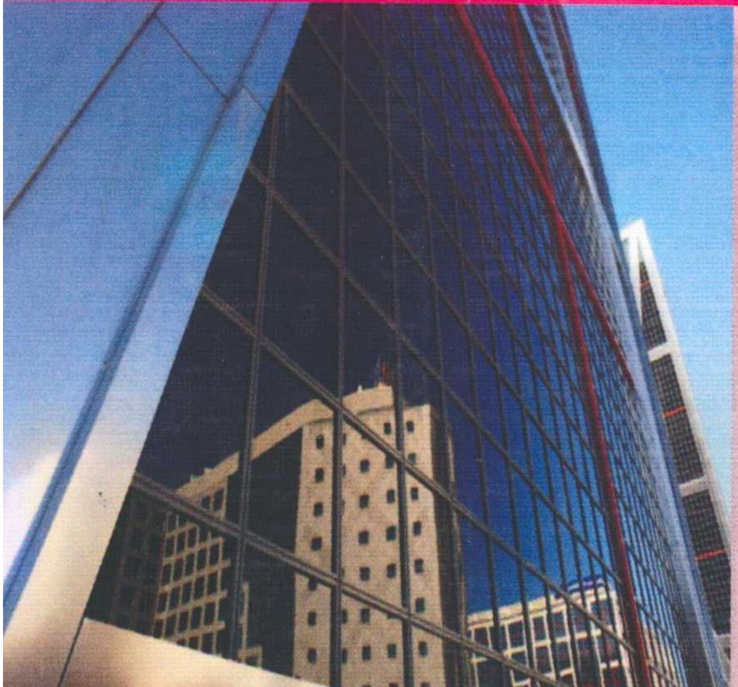
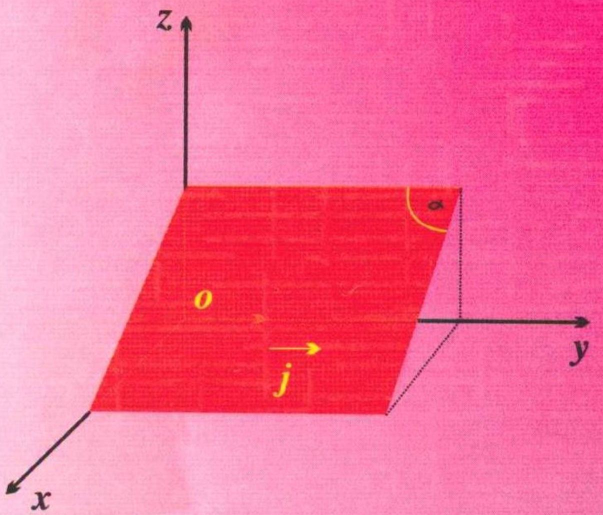
PGS. TS NGUYỄN VĂN LỘC (Chủ biên)
TRẦN QUANG TÀI - LÊ NGỌC HẢI - TRỊNH MINH LÂM - LÊ ĐÌNH NGỌC

GIẢI BÀI TẬP
HÌNH HỌC 12

(CHƯƠNG TRÌNH CHUẨN)

- *Tóm tắt lý thuyết*
- *Bài tập cơ bản*
- *Câu hỏi trắc nghiệm*
- *Đáp án*





NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PGS.TS NGUYỄN VĂN LỘC (Chủ biên)
TRẦN QUANG TÀI - LÊ NGỌC HẢI
TRỊNH MINH LÂM - LÊ ĐÌNH NGỌC

GIẢI BÀI TẬP
HÌNH HỌC 12

(Chương trình chuẩn)

- **Tóm tắt lý thuyết**
- **Bài tập căn bản**
- **Câu hỏi trắc nghiệm**
- **Đáp án**

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI - 2008

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại:(04) 39714896;(04) 397 24770; Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc : PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập :PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập : HOÀNG ĐỨC

Trình bày bìa : QUỐC VIỆT
Đối tác liên kết xuất bản :
CÔNG TY SÁCH-TBGD ĐỨC TRÍ

SÁCH LIÊN KẾT

Giải bài tập Hình học 12 (Chương trình chuẩn)
Mã số: 1L-143ĐH2009
In 3.000 cuốn khổ 16 X 24cm. Tại Công ty TNHH In& bao bì Hưng Phú.
Số xuất bản: 212-2009/CXB/19-35/ĐHQGHN,ngày 11/3/2009.
Quyết định xuất bản số: 143LK-TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu Quý III/2009.

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách "**Giải bài tập hình học 12 chương trình chuẩn**" có nội dung tương ứng với sách giáo khoa Hình Học 12 chương trình chuẩn được áp dụng từ năm học 2008 – 2009

Mỗi mục (§) của chương gồm bốn phần:

I. Tóm tắt lý thuyết

II. Bài tập căn bản

III. Câu hỏi trắc nghiệm

IV. Đáp án

Phần I. Trình bày những vấn đề lý thuyết trọng tâm nhất của sách giáo khoa mà các em cần phải hiểu và nắm vững.

Phần II. Trình bày lời giải chi tiết của các bài tập có trong sách giáo khoa, mỗi bài tập đều nêu đầy đủ các bước lập luận với căn cứ là các định nghĩa, định lý, các tính chất đã học.

Phần III. Trình bày các câu hỏi trắc nghiệm nhằm giúp các em ôn luyện lại kiến thức đã học.

Phần IV: Trình bày đáp án các câu hỏi trắc nghiệm nêu ở phần III.

Việc sử dụng sách nên thực hiện theo trình tự như sau: Sau khi học lý thuyết, các em hãy tự mình giải các bài tập có trong sách giáo khoa, nếu gặp khó khăn có thể tham khảo lời giải bài tập trình bày ở phần II, hơn nữa ngay cả khi giải được bài tập của sách giáo khoa, các em cũng nên so sánh lời giải của mình với lời giải được trình bày trong sách này để hiểu sâu sắc, đầy đủ kiến thức và phương pháp giải toán. Tiếp theo các em nên dành thời gian giải các câu hỏi trắc nghiệm ở phần III để củng cố kiến thức.

Hy vọng cuốn sách sẽ là tài liệu hỗ trợ tích cực giúp các em học tốt hình học 12 chuẩn.

Rất mong các em dùng sách với ý thức tự chủ cao và không dùng sách theo cách chỉ "đọc" các lời giải có sẵn của các bài tập trong SGK.

Để việc sử dụng cuốn sách đạt hiệu quả cao, các em nên kết hợp sử dụng các cuốn sách khác của cùng tác giả như: Các dạng bài tập và phương pháp giải Giải Tích 12; Kiến thức chuẩn và nâng cao Giải Tích 12; Toán bồi dưỡng trắc nghiệm và tự luận Giải Tích 12; Các chủ đề bám sát – nâng cao GiảiTích 12; 1250 câu hỏi trắc nghiệm khách quan toán 12....

Chúc các em thành công.

Các tác giả

Chương I. KHỐI ĐA DIỆN

§1. Khái niệm về khối đa diện

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Hình đa diện là hình được tạo bởi một số các đa giác thỏa mãn đồng thời hai tính chất:

– Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không giao nhau, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.

– Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

2. Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là điểm ngoài của khối đa diện. Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện được gọi là điểm trong của khối đa diện, tập hợp tất cả các điểm trong của khối đa diện được gọi là miền trong, tập hợp các điểm ngoài được gọi là miền ngoài của khối đa diện.

Miền ngoài của khối đa diện chứa hoàn toàn một đường thẳng nào đấy.

3. Hai đa diện bằng nhau.

Hai đa diện được gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.

4. Phân chia và lắp ghép các khối đa diện.

Nếu khối đa diện (H) là hợp của hai khối đa diện (H_1), (H_2) sao cho (H_1) và (H_2) không có điểm trong chung thì ta nói có thể chia được khối đa diện (H) thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2), hay có thể lắp ghép hai khối đa diện (H_1) và (H_2) với nhau để được (H).

II. BÀI TẬP CĂN BẢN.

Bài 1. Chứng minh rằng một đa diện có các mặt là những tam giác thì tổng số các mặt của nó phải là một số chẵn. Cho ví dụ.

Giải

Gọi số các mặt của đa diện là n ($n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 4$). Vì mỗi mặt của khối đa diện có 3 cạnh và mỗi cạnh chỉ là cạnh chung của đúng hai mặt nên số cạnh của nó sẽ là: $\frac{3.n}{2}$.

Vì số cạnh phải là số tự nhiên, nên ta có 3n chia hết cho 2, từ đây ta suy ra n chia hết cho 2.

Ví dụ. Hình chóp tam giác (tứ diện)

Bài 2. Chứng minh rằng một đa diện mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của một số lẻ mặt thì tổng số các đỉnh của nó phải là một số chẵn. Cho ví dụ.

Giải

Giả sử tổng số đỉnh của khối đa diện là n ($n \geq 4$, $n \in \mathbf{N}^*$) và các đỉnh là: $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$. Gọi số mặt của đa diện chứa đỉnh A_i là $2m_i + 1 \Rightarrow$ số cạnh A_i là $2m_i + 1$. Vì mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên số cạnh của khối đa diện là:

$$c = \frac{2m_1 + 1 + 2m_2 + 1 + \ldots.. + 2m_n + 1}{2}\left(i = \overline{1, n}\ ; m \in \mathbf{N}^*\right)$$

$$= \frac{2(m_1 + m_2 + \ldots. + m_n) + n}{2} = m_1 + m_2 + \ldots.. + m_n + \frac{n}{2}$$

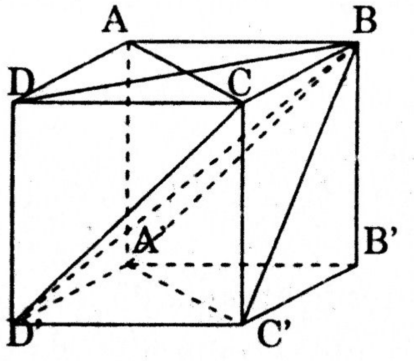
Vì c nguyên, nên $\frac{n}{2}$ nguyên hay n là số chẵn.

Ví dụ: khối chóp tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 3. Chia một khối lập phương thành 5 khối tứ diện.

Giải

Ta có khối lập phương:



Ta chia khối lập phương thành 5 khối tứ diện sau:
A'ABD; C'BCD; BA'B'C'; DA'C'D'; BDA'C'

Bài 4. Chia khối lập phương thành 6 khối tứ diện bằng nhau.

Giải

Ta chia khối lập phương thành 6 khối tứ diện bằng nhau sau đây:
BB'A'C', A'ACB; BCA'C'; CA'D'C'; DACD'; AD'A'C.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM.

1. Khối chóp có đáy là đa giác lồi n cạnh. Tổng số cạnh của khối chóp là:

(A) 2n; **(B)** 2n + 1; **(C)** 2n + 2; **(D)** 2n + 3.

2. Gọi S là tổng số các đỉnh, các mặt, các cạnh của khối lập phương. Khẳng định nào đúng?

(A) S = 22; **(B)** S = 24; **(C)** S = 26; **(D)** S = 28

3. Tổng số đo tất cả các góc phẳng ở tất cả các đỉnh của một khối hộp là:

(A) 6π; **(B)** 12π; **(C)** 24π; **(D)** 36π.

4. Cho một khối chóp đáy là một ngũ giác lồi, giả sử ta phân chia khối chóp thành những khối tứ diện. Khẳng định nào không đúng?

(A) Phân chia khối chóp thành nhiều nhất ba khối tứ diện;

(B) Phân chia khối chóp thành bao nhiêu khối tứ diện cũng được;

(C) Phân chia khối chóp thành ít nhất 3 khối tứ diện.

(D) Có nhiều hơn một cách để phân chia khối chóp đó thành 3 khối tứ diện khác nhau.

5. Cho tứ diện OABC ở đó $OA \perp OB$; $OB \perp OC$; $OC \perp OA$ và $OA + OB = OC$.

Đặt: $sđ\widehat{OCA} + sđ\widehat{OCB} + sđ\widehat{ACB} = \varphi$. Khẳng định nào đúng?

(A) $\frac{\pi}{6}$; **(B)** $\frac{\pi}{2}$; **(C)** $\frac{2\pi}{3}$; **(D)** π.

IV. ĐÁP ÁN.

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	**(A)**	**(C)**	**(B)**	**(A)**	**(B)**

§2. Khối đa diện lồi và khối đa diện đều

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Khối đa diện (H) được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H). Đa diện xác định (H) được gọi là đa diện lồi.

2. Khối đa diện đều là khối đa diện lồi có tính chất sau:

a) Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh.

b) Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt.

– Khối đa diện đều như vậy được gọi là khối đa diện đều loại {p; q}

– Các mặt của khối đa diện đều là những đa giác đều bằng nhau.

3. Định lý: Chỉ có 5 loại khối đa diện đều. Đó là loại {3; 3}, loại {4; 3} loại {3; 4}, loại {5; 3} và loại {3; 5}.

Bảng tóm tắt của 5 loại khối đa diện đều.

Loại	Tên gọi	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt
{3; 3}	Tứ diện đều	4	6	4
{4; 3}	Lập phương	8	12	6
{3; 4}	Bát diện đều	6	12	8
{5; 3}	Mười hai mặt đều	20	30	12
{3; 5}	Hai mươi mặt đều	12	30	20

II. BÀI TẬP CĂN BẢN.

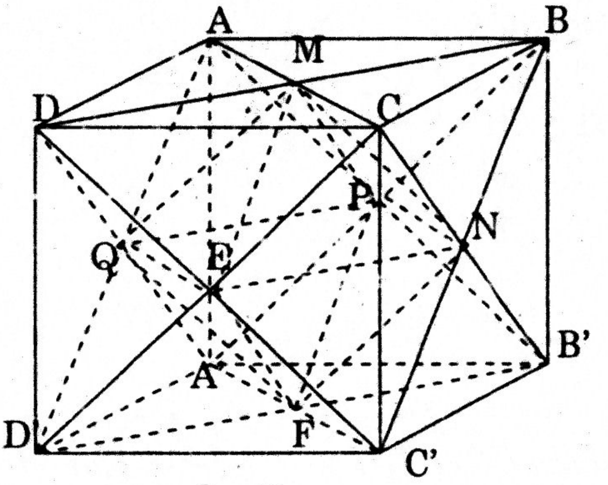
Bài 2. Cho hình lập phương (H). Gọi (H') là hình bát diện đều có các đỉnh là tâm các mặt của (H). Tính tỉ số diện tích toàn phần của (H) và (H').

Giải

Giả sử khối lập phương có cạnh bằng a. Khi đó diện tích toàn phần của nó là: $S_1 = 6.a^2$

Xét bát diện đều thu được, khi đó diện tích toàn phần của nó là 8 lần diện tích tam giác đều MQE (Hình vẽ)

Xét tam giác ACD', ta có M, Q lần lượt là trung điểm của AC và AD' nên MQ là đường trung bình của tam giác ACD', do đó $MQ = \frac{1}{2}CD' = \frac{1}{2}.\sqrt{2}a$



Ta có: $S_{\Delta MQE} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}a\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{8}a^2\sqrt{3}$

Diện tích xung quanh của bát diện đều là: $S_2 = 8.\frac{1}{8}.a^2\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$

Do đó: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{6a^2}{a\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

Bài 3. Chứng minh rằng tâm của các mặt của hình tứ diện đều là các đỉnh của một hình tứ diện đều.

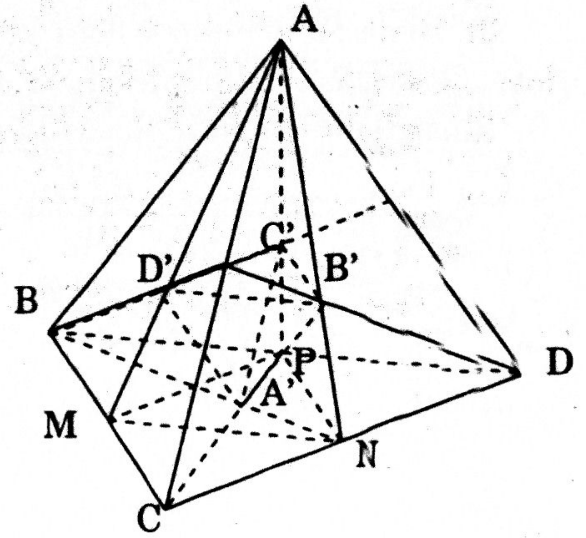
Giải

Gọi tâm các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D lần lượt là A', B', C', D'.

Ta sẽ chứng minh cho 4 điểm A', B', C', D' tạo thành tứ diện đều.

Hiển nhiên 4 điểm đó tạo thành một tứ diện.

Gọi trung điểm các cạnh BC, CD, DB lần lượt là M, N, P. Dễ thấy: tam giác AMN đồng dạng với tam giác AD'B'



Do đó: $\frac{D'B'}{MN} = \frac{AD'}{AM} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow D'B' = \frac{2}{3}MN = \frac{2}{3}.\frac{BD}{2} = \frac{a}{3}$ (a là độ dài cạnh của tứ diện ABCD)

Tương tự ta cũng có: $D'C' = C'B' = \frac{a}{3}$

Từ đó tam giác B'C'D' là tam giác đều cạnh bằng $\frac{a}{3}$

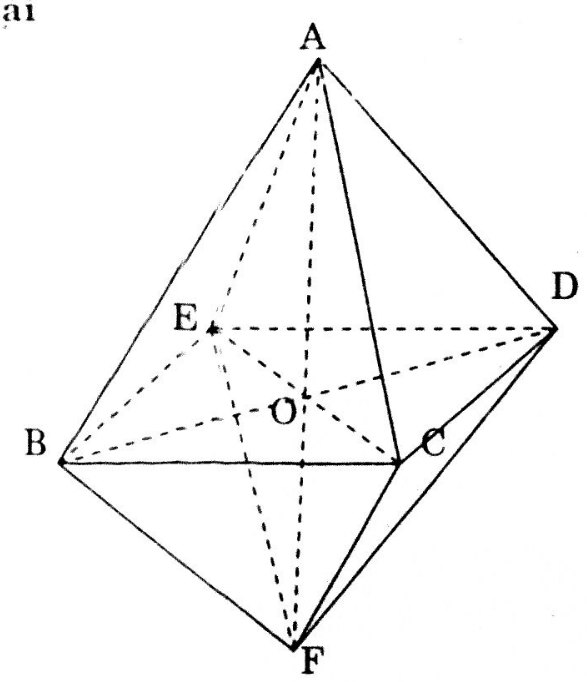
Bằng cách làm hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được các tam giác A'B'D', A'B'C', A'C'D' cũng là tam giác đều cạnh $\frac{a}{3}$. Vậy tứ diện A'B'C'D là tứ diện đều.

Bài 4. Cho hình bát diện đều ABCDEF. Chứng minh rằng:

a) Các đoạn thẳng AF, BD và CE đôi một vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

b) ABFD, AEFC và BCDE là những hình vuông.

Giải



a) Theo giả thiết ta có:

BE = ED = DC = BC

AE = EF = FC = CA

BF = FD = DA = AB

Nên các tứ giác BEDC, BADF, AEFC là các hình thoi (hiến nhiên chúng là các tứ giác)

Vì vậy AF, FC, BD đôi một vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

b) Ở câu a) ta đã chứng minh được các tứ giác BEDC, ABFD, AEFC là những hình thoi. Gọi O là giao điểm các đường thẳng BD, EC, AF.

Xét các tam giác AEC và BEC, chúng bằng nhau theo trường hợp cạnh–cạnh–cạnh nên $OA = OB \Leftrightarrow AF = BD \Rightarrow$ AEFC là hình vuông.

Hoàn toàn tương tự ta có các tứ giác còn lại là hình vuông.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM.

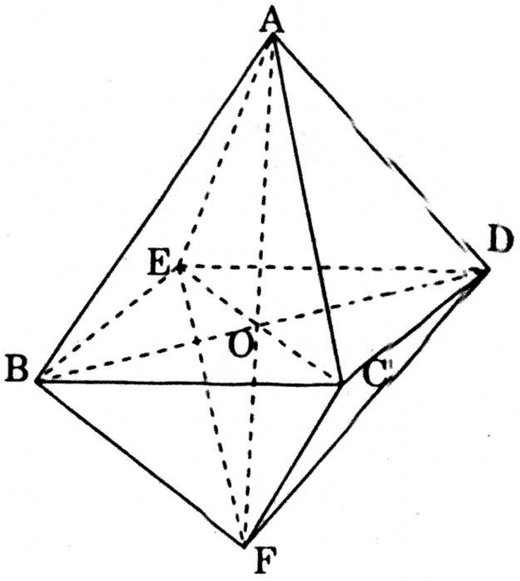
1. Tổng diện tích tất cả các mặt của khối bát diện đều cạnh a là:

(A) $a^2\sqrt{3}$; **(B)** $2a^2\sqrt{3}$; **(C)** $\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$; **(D)** $3a^2\sqrt{3}$.

2. Cho khối lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi M là giao điểm của CA' và mặt phẳng (AB'D'), đặt $k = \frac{CM}{A'M}$. Khẳng định nào đúng?

(A) $k = \frac{1}{3}$; **(B)** $k = \frac{2}{3}$; **(C)** $k = \frac{3}{4}$; **(D)** $k = 1$.

3. Cho bát diện đều cạnh a ABCDEF ở hình vẽ dưới đây. Gọi φ là góc tạo bởi một mặt bất kì của khối chóp và mặt phẳng BCDE.



a) Khẳng định nào đúng?

(A) $\sin\varphi = \sqrt{\frac{3}{4}}$; **(B)** $\sin\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$;

(C) $\sin\varphi = \sqrt{\frac{4}{5}}$; **(D)** $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Gọi α là góc tạo bởi 2 mặt phẳng (ABC) và (ABE). Khẳng định nào đúng?

(A) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$; **(B)** $\cos\alpha = \frac{1}{2}$;

(C) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; **(D)** $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

4. Cho khối đa diện đều có số đỉnh bằng 20, mỗi cạnh có độ dài bằng a. Gọi S là tổng diện tích các mặt của khối đa diện (diện tích toàn phần). Khẳng định nào đúng? S bằng:

(A) $a^2\sqrt{3}$; **(B)** $2a^2\sqrt{3}$; **(C)** $3a^2\sqrt{3}$; **(D)** $4a^2\sqrt{3}$.

IV. ĐÁP ÁN.

Câu	1	2	3a	3b	5
Đáp án	**(B)**	**(B)**	**(B)**	**(D)**	**(C)**

§3. *Khái niệm về thể tích khối đa diện.*

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa.

Mỗi khối đa diện (H) có thể đặt tương ứng với 1 số dương $V_{(H)}$ thỏa mãn các tính chất sau:

a) Nếu (H) là khối lập phương có cạnh bằng 1 thì $V_{(H)} = 1$

b) Nếu hai khối đa diện (H_1) và (H_2) bằng nhau thì $V_{(H_1)} = V_{(H_2)}$

c) Nếu khối đa diện (H) được phân chia thành hai khối đa diện. ((H_1)) và H_2) thì $V_{(H)} = V_{(H_1)} + V_{(H_2)}$

Số dương $V_{(H)}$ đó được gọi là thể tích của khối đa diện (H), số đó cũng được gọi là thể tích của hình đa diện ứng với khối đa diện (H)

– Khối lập phương có cạnh bằng 1 được gọi là khối lập phương đơn vị.

2. Các định lý.

a) Định lý 1: Thể tích của một khối hộp chữ nhật bằng tích số ba kích thước của nó.

b) Định lý 2: Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và có chiều cao h là:

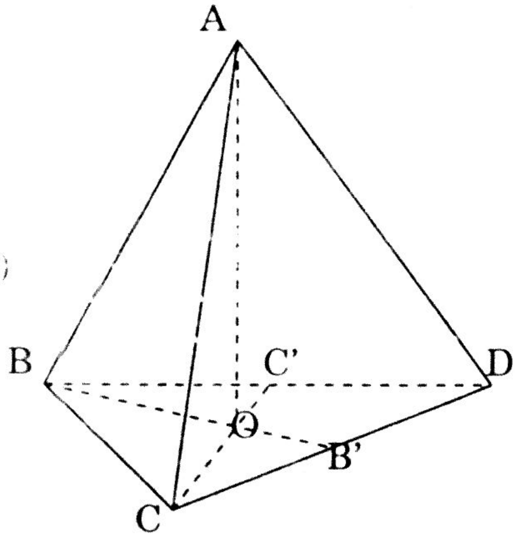
$$V = B.h$$

c) Địnhlý 3: Thể tích khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là:

$$V = \frac{1}{3}.B.h$$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN.

Bài 1. Tính thể tích khối tứ diện đều cạnh a.



Giải

Gọi BB', CC' là các đường cao của tam giác BCD. O = BB' ∩ CC' (O là tâm của tam giác đều BCD). Không khó khăn ta có thể chứng minh được AO ⊥ (BCD).

(Chứng minh cho CD ⊥ (ABB'); BD ⊥ (ACC'))

Do vậy thể tích V của khối chóp là:

$$V = \frac{1}{3}AO.S_{\Delta BCD} \quad (1)$$

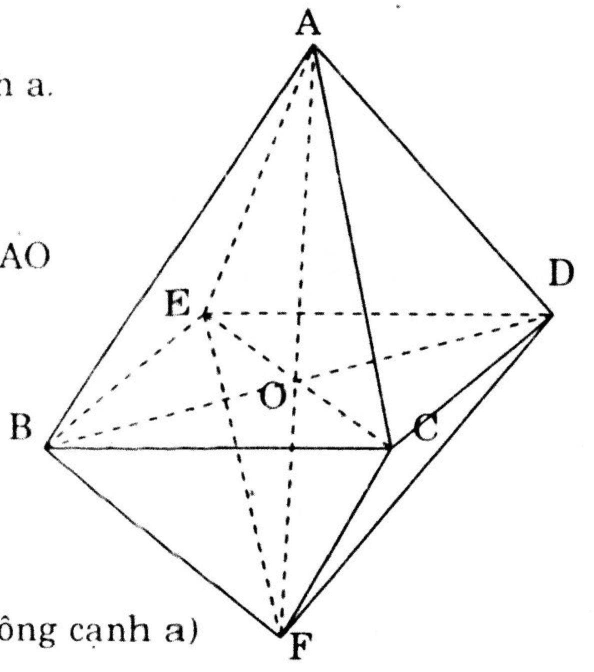
Ta có: $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}a.a.\sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (2)

$$AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{AB^2 - \frac{4}{9}BB'^2} = \sqrt{a^2 - \frac{4}{9}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}} \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta có:

$$V = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$$

Bài 2. Tính thể tích khối bát diện đều cạnh a.



Giải

Ta có: $V_{ABCDEF} = V_{ABCDE} + V_{FBCDE}$

$$= 2V_{ABCDE} = 2.\frac{1}{3}S_{\Diamond BCDE}.AO$$

(O là tâm của hình vuông BCDE)

Vì AO vuông góc với mặt phẳng BCDO nên theo định lý pi–ta–go ta có:

$$AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

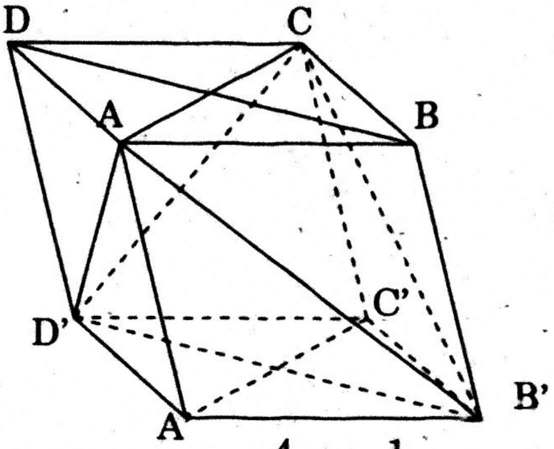
$S_{BCDE} = a^2$ (Vì tứ giác BCDE là hình vuông cạnh a)

Do đó $V_{ABCDEF} = \frac{2}{3}.a^2.\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$

Bài 3. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Tính tỉ số thể tích của khối hộp đó và thể tích của khối tứ diện ACB'D'.

Giải

Gọi thể tích khối hộp ABCD.A'B'C'D' là V.



Ta có: $V_{B'.ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{6}V$

$V_{A'.B'D'A} = \frac{1}{3}V_{ABD.A'B'D'} = \frac{1}{6}V$

$V_{D'.ACD'} = \frac{1}{3}V_{ACD.A'C'D'} = \frac{1}{6}V$

$V_{C'.B'D'C} = \frac{1}{3}V_{BCD.B'C'D'} = \frac{1}{6}V$

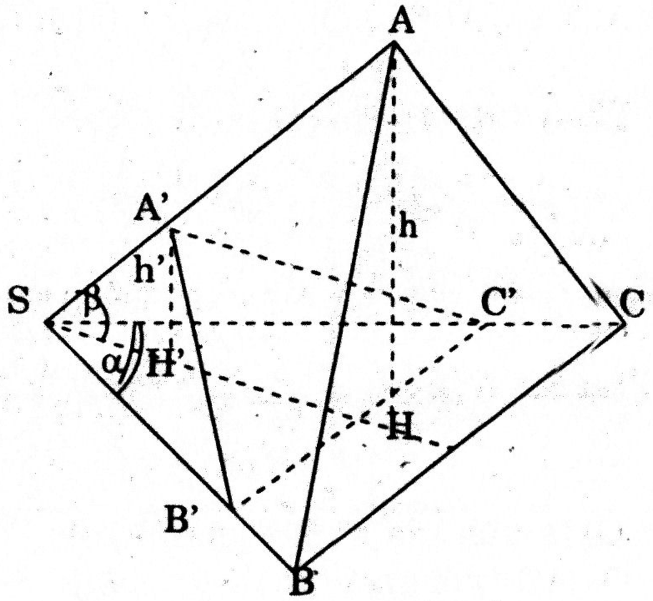
Mặt khác:

$$V_{C.AD'B'} = V - (V_{B'ABC} + V_{A'B'D'A} + V_{DACD'} + V_{C'B'D'C}) = V - \frac{4}{6}V = \frac{1}{3}V$$

Do đó $\frac{V}{V_{CAD'B'}} = 3$

Bài 4. Cho hình chóp S.ABC. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác S. Chứng minh rằng: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$

Giải



Gọi H, H' lần lượt là hình chiếu của A, A' lên mặt phẳng (SBC). Đặt $\alpha = \widehat{BSC}, \beta = \widehat{(SA, mp(SBC))}$

Ta có:

$$\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{\frac{1}{3}S_{\Delta SB'C'}.A'H'}{\frac{1}{3}S_{\Delta SBC}.AH}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}SC'.SB'.\sin\alpha.SA'\sin\beta}{\frac{1}{2}SB.SC.\sin\alpha.SA\sin\beta}$$

$$= \frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC}$$

(Hình vẽ này chỉ cho một trường hợp H, H' nằm ở miền trong tam giác SBC. Các trường hợp khác được vẽ hình và chứng minh tương tự).

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông cân ở A và AB = a. trên đường thẳng qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm D sao cho CD = a. Mặt phẳng qua C vuông góc với BD cắt BD tại F và cắt AD tại E. Tính thể tích khối tứ diện CDEF theo a.

Giải

Gọi mặt phẳng qua C và vuông góc với BD là (α)

Vì $CF \subset (\alpha)$ nên $BD \perp CF$, tương tự $EF \perp BD$

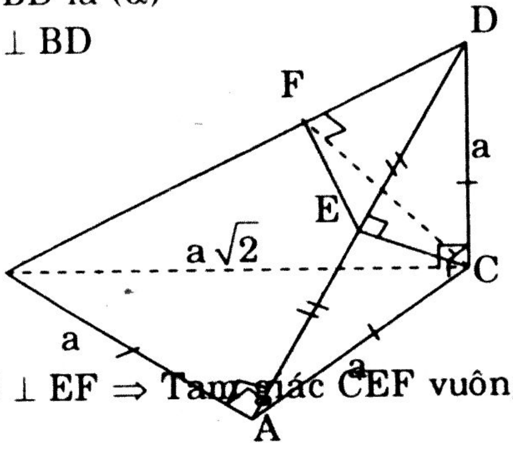
Do đó $V_{D.CEF} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ECF}.FD$ (1)

Mặt khác ta có: $BA \perp AC$ (giả thiết)

$BA \perp DC$ (giả thiết)

Nên $BA \perp (ACD) \Rightarrow BA \perp CE$ (a)

Vì $BD \perp (\alpha)$ nên $BD \perp CE$ (b)



Từ (a) và (b) ta có: $CE \perp (ABD) \Rightarrow CE \perp EF \Rightarrow$ Tam giác CEF vuông tại đỉnh E.

Theo định lý pi–ta–go ta có $EF = \sqrt{CF^2 - CE^2}$ (2)

Xét tam giác vuông CBD ($\hat{C} = 90^\circ$), CF là đường cao. Ta có:

$$\frac{1}{CF^2} = \frac{1}{CB^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2}$$

$$\Rightarrow CF^2 = \frac{2a^2}{3} \quad (3)$$

Xét tam giác vuông CDA ($\hat{C} = 90^\circ$) theo giả thiết tam giác này cân tại C. Vì $CE \perp AD$ nên E là trung điểm của AD. Từ đó suy ra $CE = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{\sqrt{2}a}{2} \Rightarrow CE^2 = \dfrac{1}{2}a^2$ (4)

Thay (3), (4) vào (2) ta có:

$$EF = \sqrt{\frac{2a^2}{3} - \frac{1}{2}a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta EFC} = \frac{1}{2}EF.EC = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{6}}{6}.\frac{\sqrt{2}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{12} \quad (5)$$

Mặt khác $FD^2 = CD^2 - CF^2 = a^2 - \dfrac{2a^2}{3} = \dfrac{a^2}{3} \Rightarrow FD = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ (6)

Thay (5), (6) vào (1) ta có:

$$V_{D.CEF} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}a^2}{12}.\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a^2}{36} \quad \text{(đvdt)}$$

Bài 6. Cho hai đường thẳng chéo nhau d và d'. Đoạn thẳng AB có độ dài bằng a trượt trên d, đoạn thẳng CD có độ dài b trượt trên d'. Chứng minh rằng khối tứ diện ABCD có thể tích không đổi.

Giải

Gọi khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau d, d' là h và góc của d và d' là φ.

Trong mặt phẳng (ABC) dựng hình bình hành CBAA'

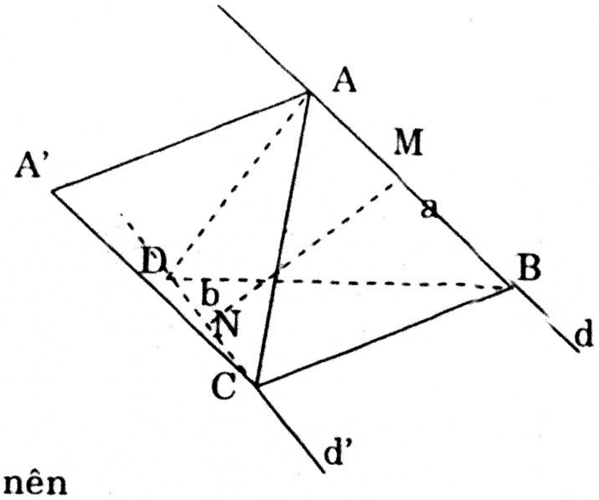
Ta có AA' // BC nên $V_{ABCD} = V_{A'BCD}$

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD ($M \in AB$, $N \in CD$)

Vì BM // CA' nên $V_{BA'CD} = V_{MA'CD}$

Ta có $MN \perp AB$ nên $MN \perp CA'$, hơn nữa $MN \perp CD$

Do đó $MN \perp (CDA')$



Chú ý rằng $(\widehat{AB, CD}) = (\widehat{AC', CD}) = \varphi$ nên

$$V_{MA'CD} = \frac{1}{3}.S_{A'CD}.MN = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}CA'.CD.\sin\varphi.MN = \frac{1}{6}a.b.h.\sin\varphi$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6}a.b.h.\sin\varphi$$

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM.

1. Cho khối hộp chữ nhật có 3 kích thước là a, b, c. Tăng đồng thời 3 kích thước lên $\sqrt{2}$ lần để được khối hộp chữ nhật mới. Thể tích khối hộp chữ nhật mới bằng bao nhiêu lần so với thể tích khối hộp chữ nhật ban đầu:

(A) $\sqrt{2}$; **(B)** 2; **(C)** $2\sqrt{2}$; **(D)** 4.

2. Cho khối chóp S.ABC có thể tích V và có SA = 3. SB = 4, SC = 5. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho: AM = 1; SN = 3; PC = 4. Gọi V' là thể tích khối chóp S.MNP. Khẳng định nào đúng?

(A) V = 10V'; **(B)** V = 6V'; **(C)** V = 5V'; **(D)** V = 4V'.

3. Cho khối tứ diện đều ABCD cạnh bằng a. M là trung điểm của AB. Thể tích của khối tứ diện ABMD là:

(A) $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$; **(B)** $\frac{a^3\sqrt{2}}{16}$; **(C)** $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$; **(D)** $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

4. Cho khối chóp tứ giác đều S.ABCD

a) Biết AB = a và góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng α. Thể tích của khối chóp là:

(A) $\frac{1}{3}a^3\tan\alpha$; **(B)** $\frac{1}{6}a^3\tan\alpha$;

(C) $\frac{1}{9}a^3\tan\alpha$; **(D)** $\frac{1}{12}a^3\tan\alpha$.

b) Biết trung đoạn bằng d và góc giữa cạnh bên và đáy bằng φ. Thể ttích của khối chóp là:

(A) $\frac{4\sqrt{2}d^3\cot\varphi}{3\sqrt{2\tan^2\varphi+1}}$; **(B)** $\frac{4\sqrt{2}d^3\tan\varphi}{3\sqrt{(2\tan^2\varphi+1)^3}}$;

(C) $4\sqrt{2}\,d^3\tan^2\varphi$; **(D)** $4\sqrt{2}\,d^3\cot^3\varphi$.

IV. ĐÁP ÁN.

Câu	1	2	3	4a	4b
Đáp án	**(C)**	**(A)**	**(D)**	**(B)**	**(B)**

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 1. Các đỉnh, cạnh, mặt của một khối đa diện phải thỏa mãn những tính chất nào?

Giải

Các đỉnh, cạnh, mặt của một khối đa diện phải thỏa mãn hai tính chất sau:

+ Hai mặt phân biệt chỉ có thể hoặc không giao nhau, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.

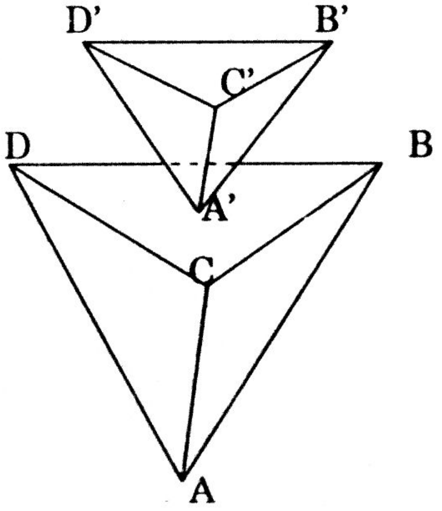
+ Mỗi cạnh của mỗi mặt nào cũng là cạnh chung của đúng hai mặt.

Bài 2. Tìm một hình tạo bởi các đa giác nhưng không phải là một đa diện.

Giải

Ở hình vẽ bên, ta xét hình được tạo bởi hai tứ diện ABCD và A'B'C'D'. Đây không phải là hình đa diện bởi vì hình này không thỏa mãn tính chất đầu tiên, đó là:

Hai mặt phân biệt (BCD) và (A'B'C') có điểm chung là A' nhưng không có một đỉnh chung nào và cũng không có một cạnh chung nào.



Bài 3. Thế nào là một khối đa diện lồi. Tìm ví dụ trong thực tế mô tả một khối đa diện lồi, một khối đa diện không lồi.

Giải

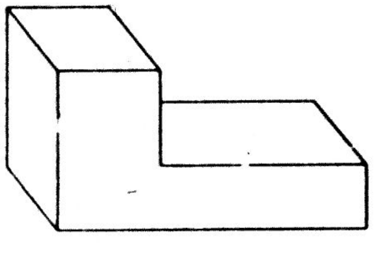
Cho khối đa diện (H). (H) được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H).

Ví dụ trong thực tế về khối đa diện lồi.

Các khối đa diện lồi trong thực tế như: bao diêm, hộp phấn.

Ví dụ về khối đa diện không lồi trong thực tế:

Cái tủ lệch (không có chân)



Bài 4. Cho hình lăng trụ và hình chóp có cùng diện tích đáy và chiều cao bằng nhau. Tính tỉ số thể tích của chúng.

Giải

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối lăng trụ và khối chóp.

Gọi S, h lần lượt là diện tích đáy và chiều cao của cả khối lăng trụ và khối chóp. Theo công thức ta có:

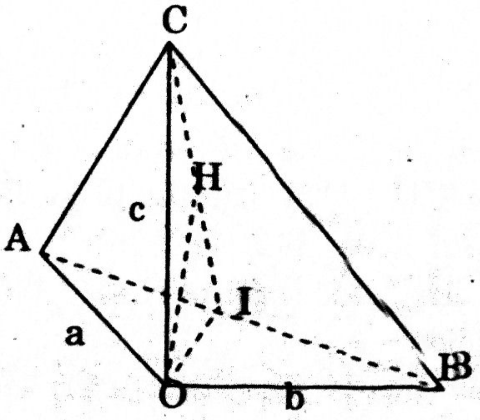
$$V_1 = S.h\ ;\quad V_2 = \frac{1}{3}S.h$$

Từ đó ta có: $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{Sh}{\frac{1}{3}Sh} = 3$

Vậy tỉ số thể tích khối lăng trụ và khối chóp có cùng diện tích đáy và chiều cao là 3.

Bài 5. Cho hình chóp tam giác O.ABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và OA = a, OB = b, OC = c. Hãy tính đường cao OH của hình chóp.

Giải



Gọi I là hình chiếu của O lên AB. Vì OC vuông góc với OA và OB nên OC $\perp$ (OAB) $\Rightarrow$ OC $\perp$ AB. Từ đó ta suy ra: AB $\perp$ (COI)

Vậy H là hình chiếu của O lên CI.

Trong tam giác vuông AOB ta có:

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \quad (1)$$

Trong tam giác vuông COI ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{OC^2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2b^2c^2}$$

$$\Leftrightarrow OH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

Nhận xét: ta có thể tính OH từ mối liên hệ:

$$V_{O.ABC} = \frac{1}{6}abc = \frac{1}{3}OH.S_{\Delta ABC}$$

Bài 6. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh AB bằng a. Các cạnh bên SA, SB, SC tạo với đáy một góc bằng 60°. Gọi D là giao điểm của SA với mặt phẳng qua BC và vuông góc với SA.

a) Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp S.DBC và S.ABC

b) Tính thể tích khối chóp S.DBC

Giải

a) ta có AB = BC = CA = a

Gọi O là hình chiếu vuông góc của (S) lên (ABC)

Khi đó ta có: $\widehat{SBO} = \widehat{SCO} = \widehat{SAO} = 60^\circ$

$\Rightarrow \Delta SOA = \Delta SOB = \Delta SOC$

$\Rightarrow$ OA = OB = OC hay O là tâm của tam giác đều ABC.

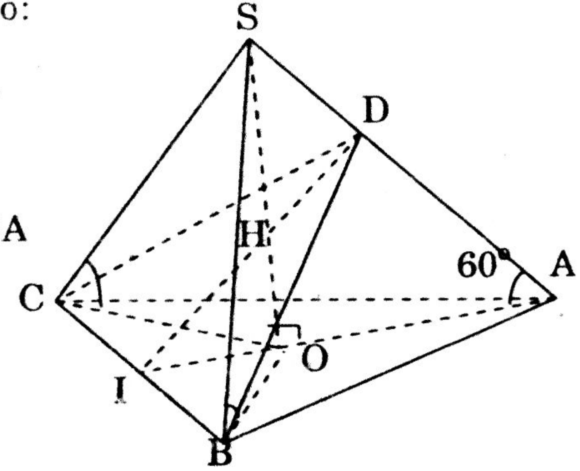
Trong các tam giác SOA, SOB, SOC. Ta có:

$SA = SB = SC = 2OA = 2.\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = a$

Gọi I là trung điểm của BC, ta có: ID ⊥ SA

Nên $ID.SA = SO.IA \Rightarrow ID = \dfrac{a\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{4}a$



Xét tam giác vuông IDA, ta có:

$DA = \sqrt{IA^2 - ID^2} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SD = \frac{2a\sqrt{3}}{3} - \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{5a\sqrt{3}}{12}$

Mặt khác: $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.DBC}} = \frac{V_{S.DBC} + V_{A.BCD}}{V_{SDBC}} = 1 + \frac{AD}{SD}$

$$= 1 + \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{5a\sqrt{3}}{12}} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{V_{S.DBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{5}{8}$$

b) Ta có: $V_{S.DBC} = \frac{1}{3}SD.S_{\Delta BCD} = \frac{1}{3}\frac{5a\sqrt{3}}{12}.\frac{1}{2}\frac{3}{4}a.a = \frac{5a^3\sqrt{3}}{96}$

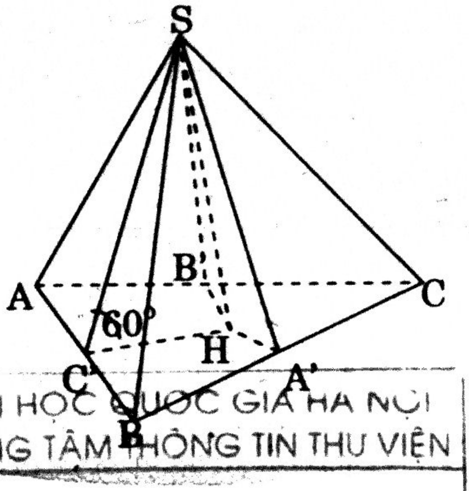
$\Rightarrow V_{SABC} = \frac{8}{5}.\frac{5a\sqrt{3}}{96} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Bài 7. **Cho hình chóp tam giác S.ABC có AB = 5a; BC = 6a; CA = 7a. Các mặt bên SAB, SBC, SCA tạo với đáy một góc bằng 60°. Tính thể tích khối chóp đó.**

Giải

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC). Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh BC, CA, AB. Xét các tam giác vuông: SHA', SHB', SHC' có:

$\widehat{SA'H} = \widehat{SB'H} = \widehat{SC'H} = 60^\circ$ (vì các góc này chính là các góc của mặt bên và mặt đáy ABC).



ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/ 2571

Từ các tam giác vuông đó dễ dàng suy ra SC' = SA' = SB' nên HA' = HB' = HC' ⇒ H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Mặt khác diện tích của tam giác ABC có thể tính theo công thức:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{(p - AB)(p - AC)(p - BC).p}$$

Với $p = \dfrac{AB + AC + BC}{2} = \dfrac{5a + 6a + 7a}{2} = 9a$

Do đó: $S_{\Delta ABC} = \sqrt{(9a - 5a)(9a - 6a)(9a - 7a)p} = \sqrt{216a^4} = 6a^2\sqrt{6}$

Vì $S_{\Delta ABC} = p.r$ (r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC)

$$\Rightarrow r = \frac{6a^2\sqrt{6}}{9a} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$$

Xét tam giác vuông SHA', ta có: $\tan 60^\circ = \dfrac{SH}{HA'} \Rightarrow SH = r.\tan 60^\circ$

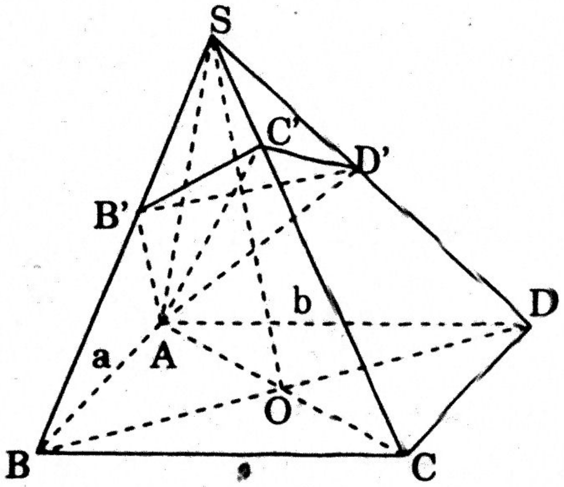
$$\Rightarrow SH = \frac{2a\sqrt{6}}{3}.\sqrt{3} = 2\sqrt{2}a$$

Do đó thể tích của khối chóp S.ABC là:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SH = \frac{1}{3}.6.a^2\sqrt{6}.2\sqrt{2}\,a = 8\sqrt{3}\,a^3$$

ài 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. SA vuông góc với đáy và AB = a, AD = b, SA = c. Lấy các điểm B', D' theo thứ tự thuộc SB, SD sao cho AB' ⊥ SB, AD' ⊥ SD. Mặt phẳng (AB'D') cắt SC tại C'. Tính thể tích khối chóp S.AB'C'D'.

Giải



Dựng điểm C' như hình vẽ.

Ta có: BC ⊥ AB (giả thiết) (1)

Mặt khác: SA ⊥ (ABCD)

nên SA ⊥ BC (2)

Từ (1) và (2) ta có: BC ⊥ (SAB)

⇒ BC ⊥ AB' (3)

Ta có: AB' ⊥ SB (giả thiết) (4)

Từ (3) và (4) suy ra AB' ⊥ (SBC)

Hay ta có được AB' ⊥ B'C'

⇔ ΔAB'C' vuông tại B'

Hoàn toàn tương tự ta cũng có ΔAD'C' vuông tại D'

Ta có: AB' ⊥ SC; AD' ⊥ SC (Vì AB' ⊥ (SBC), AD' ⊥ (SDC))

Nên SC ⊥ (AB'C'D'). Vì vậy:

$$V_{S.AB'C'D'} = \frac{1}{3}S_{\diamond AB'C'D'}.SC' = \frac{1}{3}\left[S_{\Delta AB'C'} + S_{\Delta AD'C'}\right].SC'$$

$$= \frac{1}{6}\left[AB'.B'C' + AD'.D'C'\right].SC' \quad (*)$$

Ta có: $\dfrac{1}{AB'^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{a^2 + c^2}{a^2c^2} \Rightarrow AB'^2 = \dfrac{a^2c^2}{a^2 + c^2} \Rightarrow AB' = \dfrac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$ (5)

Tương tự: $AD'^2 = \dfrac{b^2c^2}{b^2 + c^2} \Rightarrow AD' = \dfrac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$ (6)

$$\frac{1}{AC'^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{c^2(a^2 + b^2)}$$

$$\Rightarrow AC'^2 = \frac{c^2(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow AC' = \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (7)$$

$$\Rightarrow B'C'^2 = AC'^2 - AB'^2 = -\frac{a^2c^2}{a^2 + c^2} + \frac{c^2(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$= \frac{-a^4c^2 - a^2b^2c^2 - a^2c^4 + a^4c^2 + c^4a^2 + a^2b^2c^2 + c^4b^2}{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$= \frac{c^4b^2}{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$\Rightarrow B'C' = \frac{c^2b}{\sqrt{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)}} \quad (8)$$

Tương tự $C'D' = \dfrac{c^2a}{\sqrt{(b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)}}$ (9); $SC' = \dfrac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ (10)

Thay (5), (6), (7), (8) (9) và (10) vào (*) ta có:

$$V_{S.AB'C'D'} = \frac{1}{6}\left[\frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}} \cdot \frac{c^2b}{\sqrt{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot \frac{c^2a}{\sqrt{(b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)}}\right] \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

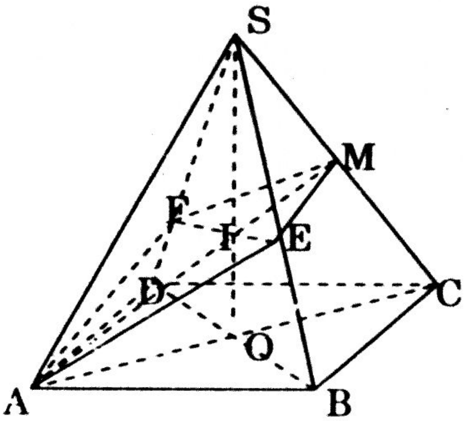
$$= \frac{1}{6}\frac{c^5ab}{a^2 + b^2 + c^2}\left[\frac{1}{a^2 + c^2} + \frac{1}{b^2 + c^2}\right]$$

Bài 9. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với đáy một góc bằng 60°. Gọi M là trung điểm của SC. Mặt phẳng đi qua AM và song song với BD, cắt SB tại E và cắt SD tại F. Tính thể tích khối chóp S.AEMF.

Giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD. AM cắt SO tại I.

Do mặt phẳng chứa AM, song song với BD nên E, F lần lượt là các giao điểm của đường thẳng qua I, song song với BD với các đường thẳng SB, SD.



Ta có: $DB \perp AC$ (giả thiết)

$SO \perp BD$ (vì S.ABCD là hình chóp đều)

Nên $BD \perp (SAC) \Rightarrow EF \perp (SAC) \Rightarrow EF \perp SC$ (1)

Mặt khác tam giác SAC cân tại S, hơn nữa theo giả thiết thì góc giữa SA và (ABCD) bằng 60° tức là góc $\widehat{SAC} = 60^\circ$ nên ΔSAC đều. Vì M là trung điểm của SC nên $AM \perp SC$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $SC \perp (AEMF) \Rightarrow SM$ là chiều cao của khối chóp S.AEMF

Cũng từ $EF \perp (SAC) \Rightarrow EF \perp AM \Rightarrow S_{AEMF} = \frac{1}{2}EF.AM$

$\Rightarrow V_{S.AEMF} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}EF.AM.SM$ (*)

Vì ΔSAC đều và $AC = a\sqrt{2}$ (đường chéo của hình vuông cạnh a) nên $SC = a\sqrt{2} \Rightarrow SM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (3)

Cũng vì ΔSAC đều cạnh $a\sqrt{2}$ nên $AM = \frac{a\sqrt{2}.\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ (4)

Dễ thấy I là trọng tâm của tam giác SDB nên theo định lý Talet ta có:

$\frac{EF}{BD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$ (5)

Thay (3), (4) và (5) vào (*) ta có:

$V_{S.AEMF} = \frac{1}{6}.\frac{2}{3}.a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$

Bài 10. Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a.

a) Tính thể tích khối tứ diện A'BB'C

b) Mặt phẳng đi qua A'B' và trọng tâm tam giác ABC cắt AC và BC lần lượt tại E và F. Tính thể tích hình chóp C.A'B'FE

Giải

* Bạn đọc hãy chỉ ra cách dựng EF (EF đi qua G, EF // AB)

a) Ta có:

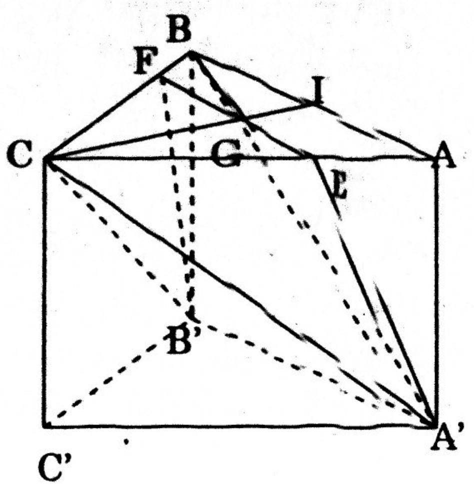
$V_{ABC.A'B'C'} = V_{A'.ABC} + V_{C.C'B'A'} + V_{A'.BB'C}$

$\Leftrightarrow V_{A'BB'C} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A'.ABC} - V_{C.C'B'A'}$ (1)

Ta có: $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC}$

$= a.\frac{1}{2}.a^2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$ (2)

$V_{C.C'B'A'} = \frac{1}{3}.CC'.S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{3}\frac{a^3\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ (3)



Tương tự: $V_{A'.ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Thay (2), (3) và (4) vào (1) ta có: $V_{ABB'C} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Ta có: $V_{C.B'AB} = V_{C.B'AA'} = \dfrac{1}{3}CI.\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

$V_{C.A'B'FE} = V_{C.B'FE} + V_{C.B'EA'}$

Mặt khác theo bài tập 4 §3 ta có:

$$\frac{V_{C.B'FE}}{V_{C.B'BA}} = \frac{CF}{CB}.\frac{CE}{CA} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{C.B'FE} = \frac{4}{9}.\frac{a^2\sqrt{3}}{12} = \frac{a^2\sqrt{3}}{27}$$

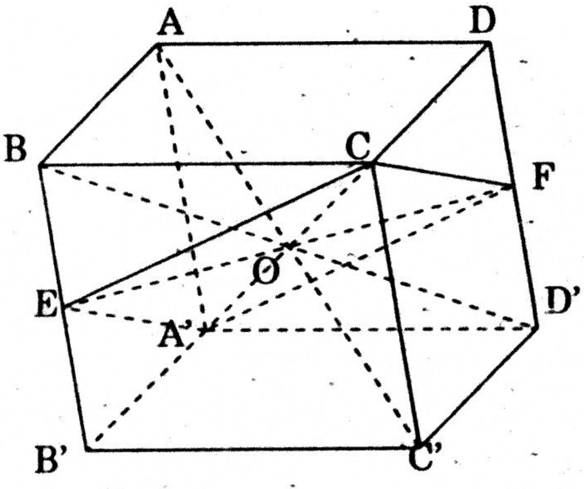
$$\frac{V_{C.B'A'E}}{V_{C.B'A'A}} = \frac{CE}{CA} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{C.B'A'E} = \frac{2}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{12} = \frac{a^2\sqrt{3}}{18}$$

$$\Rightarrow V_{C.A'B'FE} = \frac{a^2\sqrt{3}}{27} + \frac{a^2\sqrt{3}}{18} = \frac{2a^2\sqrt{3} + 3a^2\sqrt{3}}{54} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{54}$$

$$\Leftrightarrow V_{C.A'B'FE} = \frac{5a^2}{18\sqrt{3}}$$

Bài 11. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BB' và DD'. Mặt phẳng (CEF) chia khối hộp làm hai khối đa diện. Tính tỉ số thể tích của hai khối đa diện đó.

Giải



Không khó khăn nhiều có thể chỉ ra được (CEF) đi qua A'. Từ đây suy ra thiết diện của hình hộp bị cắt bởi mặt phẳng (CEF) là hình bình hành AECF. Do khối hộp nhận điểm O làm tâm đối xứng (giao các đường chéo) nên phép đối xứng tâm O biến khối đa diện ABCDEA'F thành khối đa diện C'D'A'B'FCE. Do đó hai khối này bằng nhau và hiển nhiên tỉ số thể tích của chúng bằng 1.

Bài 12. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi M là trung điểm A'B', N là trung điểm của BC.

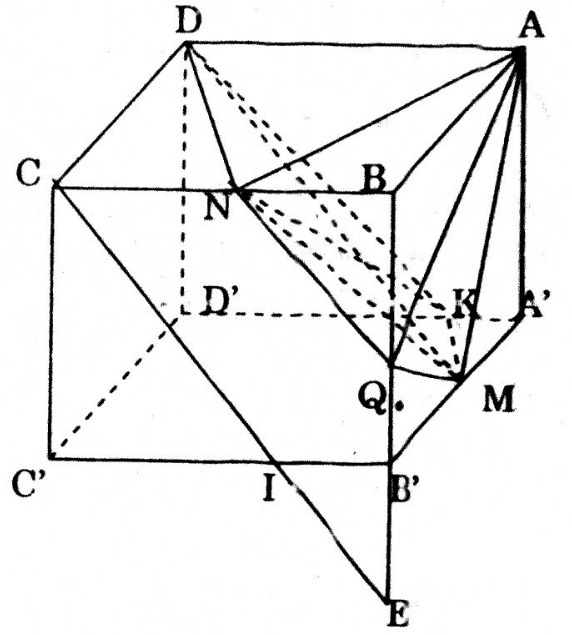
a) Tính thể tích khối tứ diện ADMN

b) Mặt phẳng (DMN) chia khối lập phương đã cho thành hai khối đa diện. Gọi (H) là khối đa diện chứa đỉnh A, (H') là khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\dfrac{V(H)}{V(H')}$

Giải

a) Xét khối tứ diện (chóp) M.AND. Chiều cao của khối chóp này (đỉnh M) chính bằng cạnh AA' của hình lập phương.

Do đó: $V_{M.AND} = \frac{1}{3}AA'.S_{\Delta NAD}$ (1)



Ta có: AA' = a

$S_{\Delta NAD} = S_{ABCD} - S_{\Delta CND} - S_{\Delta ABN}$

$= a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$ (3)

Thay (2), (3) vào (1) ta có:

$$V_{M.AND} = \frac{1}{3}a.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{6}$$

b) Gọi giao tuyến của (DMN) với (A'B'C'D') là d, d ∩ A'D' = K.

Ta có MK // DN, dễ chỉ ra được

$KA' = \frac{a}{4}$; $KD' = \frac{3a}{4}$

Gọi Δ là giao tuyến của (DMN) với (CBB'C'), ta có Δ // DK

Lấy I ∈ C'B' sao cho $IB' = \frac{a}{4}$; $IC' = \frac{3a}{4}$. Khi đó KD // CI nên DK // CI

Đặt E = CI ∩ BB'. Ta có:

$$\frac{EB'}{EB} = \frac{IB'}{CB} = \frac{1}{4} \Rightarrow EB' = \frac{1}{4}EB = \frac{1}{4}(EB' + B'B) \Rightarrow \frac{3}{4}EB' = \frac{1}{4}a$$

$$\Rightarrow EB' = \frac{1}{3}a \Rightarrow EB = \frac{4}{3}a$$

Gọi Q = Δ ∩ BB' $\Rightarrow QB = \frac{1}{2}BE = \frac{2}{3}a \Rightarrow QB' = \frac{1}{3}a.$

Ta có: $V_{(H)} = V_{Q.ABND} + V_{D.QMA} + V_{D.MAK} + V_{A.A'MK}$

$$= \frac{a^3}{6} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^3}{12} + \frac{a^3}{48} = \frac{a^3(24 + 16 + 12 + 3)}{144} = \frac{55a^3}{144}$$

$$\Rightarrow V_{(H')} = a^3 - \frac{55a^3}{144} = \frac{144a^3 - 55a^3}{144} = \frac{89a^3}{144}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{55a^3}{144} \times \frac{144}{89a^3} = \frac{55}{89}$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I

A. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM.

1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Số đỉnh và số mặt của 1 hình đa diện luôn bằng nhau;

(B) Tồn tại hình đa diện có số đỉnh và số mặt bằng nhau;

(C) Tồn tại một hình đa diện có số cạnh bằng số đỉnh;

(D) Tồn tại một hình đa diện có số cạnh và số mặt bằng nhau.

2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Số các đỉnh hoặc số các mặt của bất kì hình đa diện nào cũng:

(A) Lớn hơn hoặc bằng 4; **(B)** Lớn hơn 4;

(C) Lớn hơn hoặc bằng 5; **(D)** Lớn hơn 5.

3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Số cạnh của hình đa diện luôn luôn:

(A) Lớn hơn hoặc bằng 6; **(B)** Lớn hơn 6;

(C) Lớn hơn 7; **(D)** Lớn hơn hoặc bằng 8.

4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) Hình tứ diện là hình đa diện lồi;

(B) Hình hộp là hình đa diện lồi;

(C) Hình chóp là hình đa diện lồi;

(D) Hình lăng trụ tam giác là hình đa diện lồi.

5. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) Hai khối chóp có diện tích đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau;

(B) Hai khối chóp cụt có diện tích một đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau;

(C) Hai khối lăng trụ có diện tích đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

(D) Hai khối chóp cụt có diện tích hai đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

6. Cho hình chóp S.ABC. Gọi A', B' lần lượt là trung điểm của SA và SB. Khi đó tỉ số thể tích của hai khối chóp S.A'B'C' và S.ABC bằng:

(A) $\frac{1}{2}$; **(B)** $\frac{1}{3}$; **(C)** $\frac{1}{4}$; **(D)** $\frac{1}{8}$

7. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tỉ số thể tích của hai khối chóp S.A'B'C'D' và S.ABCD bằng:

(A) $\frac{1}{2}$; **(B)** $\frac{1}{4}$; **(C)** $\frac{1}{8}$; **(D)** $\frac{1}{16}$.

8. Khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a, khi đó thể tích của khối lăng trụ là:

(A) $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$; (B) $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$; (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$; (D) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$

9. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Tỉ số thể tích của khối tứ diện ACB'D' và khối hộp ABCD.A'B'C'D' bằng:

(A) $\frac{1}{2}$; (B) $\frac{1}{3}$; (C) $\frac{1}{4}$; (D) $\frac{1}{6}$.

10. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' gọi O là giao điểm của AC và BD. Tỉ số thể tích của khối chóp O.A'B'C'D' và khối hộp ABCD.A'B'C'D' bằng:

(A) $\frac{1}{2}$; (B) $\frac{1}{3}$; (C) $\frac{1}{4}$; (D) $\frac{1}{6}$.

B. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	**(B)**	**(A)**	**(A)**		**(B)**	**(C)**	**(C)**	**(D)**	**(B)**	**(B)**

C. HƯỚNG DẪN GIẢI.

1. Mệnh đề (A) sai vì xét hình lập phương có 8 đỉnh và 6 mặt.

– Mệnh đề (B) đúng vì hình tứ diện có số đỉnh bằng số mặt.

– Mệnh đề (C) sai.

Thật vậy:

Gọi các đỉnh của khối đa diện (nếu có) là $A_1, A_2, ..., A_n$; Số cạnh qua đỉnh A_i là m_i ($i = \overline{1,n}$; $m_i \in N^*$) qúa mỗi đỉnh A_i có ít nhất ba cạnh nên $m_i \geq 3$. Mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên số cạnh là: $C = \frac{m_1 + m_2 + ... + m_n}{2}$;

Vì C = n nên: $m_1 + m_2 + ... + m_n = 2n$ (*).

Vế trái (*) có giá trị là a thì $a \geq 3n$. Vô lí.

– Gọi số các mặt của đa diện là n, mỗi mặt có ít nhất 3 cạnh nên số cạnh của đa diện ít nhất là $\frac{3n}{2} > n$. Vậy (D) sai. Chọn **(B)**

2. Xét hình tứ diện, rõ ràng nó có 4 đỉnh và 4 mặt nên các mệnh đề (B), (C), (D) là mệnh đề sai.

Giả sử tồn tại khối đa diện mà có số đỉnh nhỏ hơn 4, rõ ràng không thể có khối đa diện mà số đỉnh là 1, hoặc 2 vì như vậy đa diện không thể tạo nên bởi hữu hạn các miền đa giác. Nếu số đỉnh là 3 thì đa diện này được tạo bởi 1 miền tam giác là vô lý.

Do đó khẳng định **(A)** là đúng. Chọn **(A)**.

3. Xét khối tứ diện, rõ ràng nó có 6 cạnh vì vậy các mệnh đề (B), (C), (D) là những mệnh đề sai.

- Xét đa diện có một mặt nào đó là tam giác. Khi đó đa diện có ít mặt nhất là tứ diện, số cạnh của tứ diện là 6. Các đa diện khác tứ diện mà có một mặt là tam giác thì hiển nhiên số cạnh lớn hơn 6. Tương tự các đa diện có một mặt nào đó là tứ giác, ngũ giác,.... Vậy **(A)** đúng. Chọn **(A)**

4. Không có mệnh đề nào sai.

5. Dựa vào các công thức tính thể tích khối chóp, khối lăng trụ thì ta có ngay các mệnh đề (A) và (C) là đúng.

Ta chứng minh được công thức sau:

$$V_{\text{chóp cụt}} = \frac{1}{3}h(B + B' + \sqrt{BB'})$$

Ở đó B, B' là diện tích 2 mặt đáy, h là chiều cao.

Do đó mệnh đề **(D)** đúng, **(B)** sai. Chọn **(B)**.

6. Ta có: $\frac{V_{S.A'B'C}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC}{SC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Khẳng định **(C)** đúng. Chọn **(C)**.

7.

Ta có: $V_{S.ABCD} = V_{S.ABC} + V_{SACD}$

$V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'C'} + V_{SA'C'D'}$

Mặt khác $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ (1)

Tương tự: $\frac{V_{S.A'C'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{1}{8}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{S.A'C'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'C'D'}}{V_{S.ABC} + V_{S.ACD}} = \frac{1}{8}$$

$\Rightarrow \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{8}$. Vậy khẳng định **(C)** đúng. Chọn **(C)**.

8. Chiều cao h của khối lăng trụ tam giác đều là: $h = a$

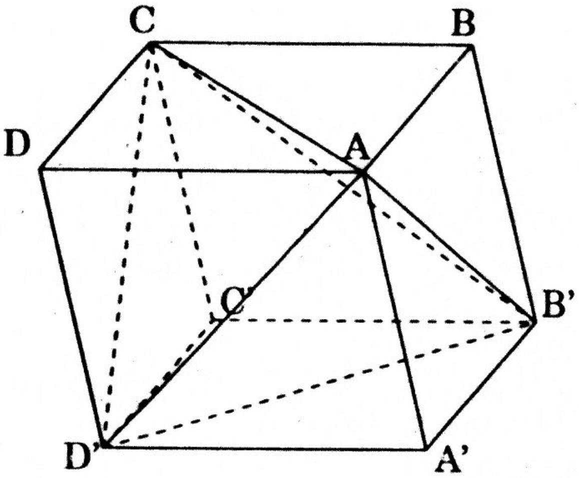
Diện tích của khối lăng trụ là $S = \frac{1}{2}a.a.\sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Thể tích của khối lăng trụ là:

$$V = S.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

Vậy khẳng định (D) là đúng. Chọn (D).

9.



Áp dụng bài tập 3 sách giáo khoa ((§3). Khái niệm về thể tích của khối đa diện) ta có:

$$\frac{V_{ACB'D'}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{3}$$. Vậy khẳng định **(B)** đúng. Chọn **(B)**.

10. Gọi h là chiều cao khối hộp ta có: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = h.S_{A'B'C'D'}$

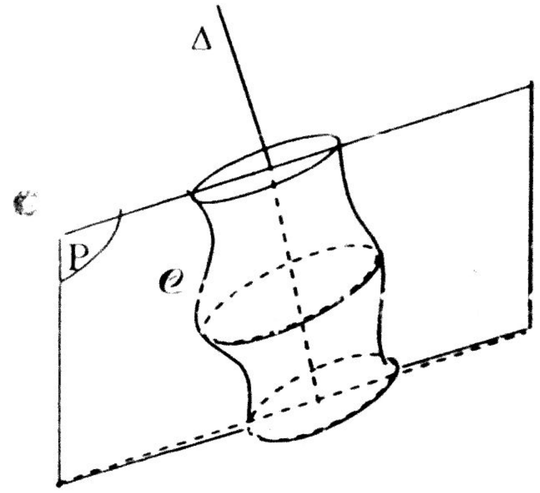
$V_{O.A'B'C'D'} = \frac{1}{3}h.S_{A'B'C'D'}$

$$\Rightarrow \frac{V_{O.A'B'C'D'}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{3}$$. Khẳng định **(B)** đúng. Chọn **(B)**.

Chương II. MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

§1. Khái niệm về mặt tròn xoay

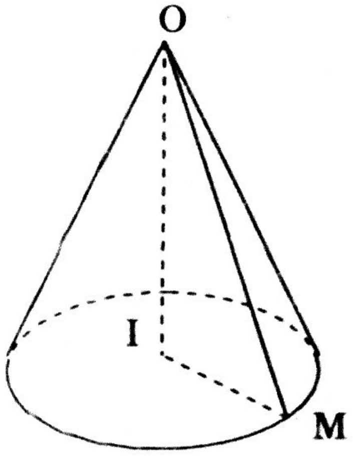
I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.



1. Trong không gian cho mặt phẳng (P) chứa một đường thẳng Δ và đường $\mathcal{C}$. Khi quay mặt phẳng (P) quanh Δ thì $\mathcal{C}$ sẽ tạo nên một hình được gọi là mặt tròn xoay. Đường $\mathcal{C}$ được gọi la đường sinh của mặt tròn xoay đó. Đường thẳng Δ gọi là trục của mặt tròn xoay.

2. Mặt tròn xoay.

– Trong không gian cho mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng Δ và d cắt nhau tại O và góc tạo thành là β không đổi với $0^o < \beta < 90^o$, khi quay (P) quanh Δ thì đường thẳng d tạo ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt nón tròn xoay, hay là mặt nón đỉnh O, đường thẳng Δ gọi là trục, d là đường sinh của mặt nón.



– Cho tam giác OIM vuông tại I quay quanh cạnh OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình được gọi là hình nón tròn xoay hay được gọi là hình nón.

– Khối nón tròn xoay là phần không gian được giới hạn bởi hình nón kể cả hình nón đó.

– Diện tích xung quanh của hình nón có bán kính đường tròn đáy là r và độ dài đường sinh là l, ta có: $S_{xq} = \pi.r.l$

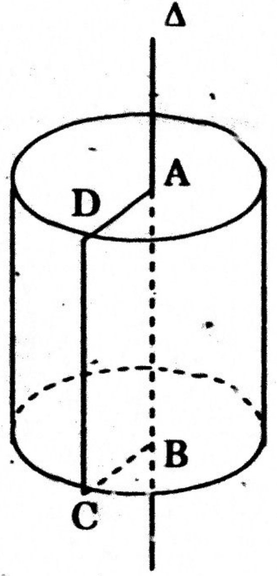
– Thể tích khối nón có bán kính đường tròn đáy là r, và chiều cao h là:

$$V = \frac{1}{3}\pi.r^2.h$$

3. Mặt trụ tròn xoay.

– Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng r, khi quay mp(P) quanh Δ thì đường thẳng l

sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay hay gọi tắt là mặt trụ. Δ là trục, l là đường sinh của mặt trụ đó.



– Cho hình chữ nhật ABCD quay quanh AB thì đường gấp khúc ADCB tạo thành một hình được gọi là hình trụ tròn xoay hay gọi là hình trụ.

– Khối trụ tròn xoay là phần không gian giới hạn bởi một hình trụ và hình trụ đó.

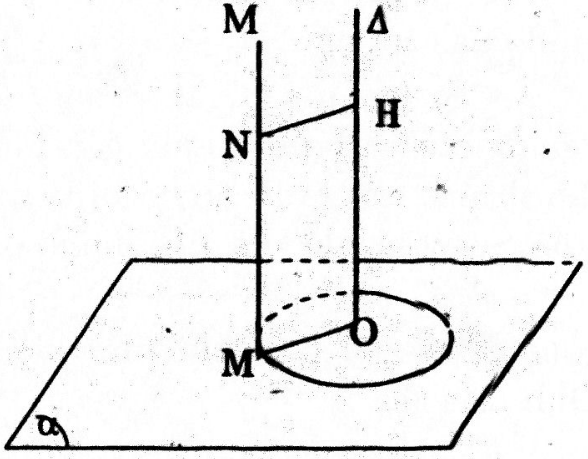
– Diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính đường tròn đáy là r và độ dài đường sinh là l thì: $S_{xq} = 2\pi r.l$

– Thể tích của khối trụ tròn xoay có bán kính đường tròn đáy là r và chiều cao h là: $V = \pi.r^2.h$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN.

Bài 1. Cho đường tròn tâm O bán kính r nằm trên một mặt phẳng (P). Từ những điểm M thuộc đường tròn này ta kẻ những đường thẳng vuông góc với (P). Chứng minh rằng những đường thẳng như vậy nằm trên một mặt trụ tròn xoay. Hãy xác định trục của mặt trụ và bán kính của mặt trụ đó.

Giải



– Qua tâm O của đường tròn kẻ đường thẳng Δ và Δ vuông góc với mặt phẳng (P). Ta có:

Δ // m (m là đường thẳng qua M và $m \perp (P)$) và khoảng cách giữa Δ và m luôn bằng r)

– Vậy các đường thẳng m luôn luôn nằm trên mặt trụ tròn xoay có trục là đường thẳng Δ và có bán kính bằng r.

Bài 2. Trong mỗi trường hợp sau đây hãy gọi tên các hình tròn xoay hoặc khối tròn xoay sinh ra bởi:

a) Ba cạnh của hình chữ nhật khi quay quanh đường thẳng chứa cạnh thứ tư.

b) Ba cạnh của một tam giác cân khi quay quanh trục đối xứng của nó.

c) Một tam giác vuông kể các điểm trong tam giác vuông đó khi quay quanh đường thẳng chứa 1 cạnh góc vuông.

d) Một hình chữ nhật kể các điểm trong của hình chữ nhật đó khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh.

Giải

a) Hình tròn xoay sinh ra bởi quay 3 cạnh của hình chữ nhật quanh đường thẳng chứa cạnh thứ tư là hình trụ tròn xoay (hay hình trụ)

b) Hình tròn xoay sinh ra bởi một tam giác cân quay quanh trục đối xứng của nó là hình nón tròn xoay (hay là hình nón).

c) Khối tròn xoay đó gọi là khối nón tròn xoay.

d) Khối tròn xoay đó gọi là khối trụ tròn xoay.

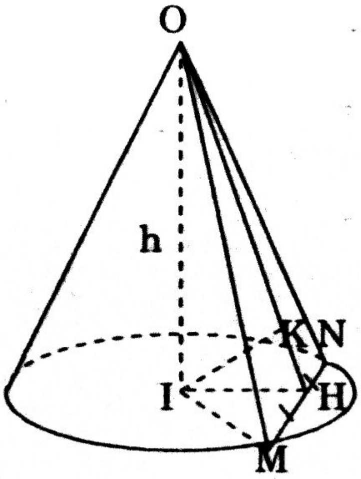
Bài 3. Cho hình nón tròn xoay có đường cao $h = 20$cm, bán kính đáy $r = 25$cm.

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón đã cho.

b) Tính thể tích của khối nón tạo bởi hình nón đó.

c) Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12cm. Tính diện tích thiết diện.

Giải



a) Áp dụng công thức: $S_{xq} = \pi.r.l$

Độ dài đường sinh của mặt nón là:

$$l = \sqrt{OI^2 + IM^2} = \sqrt{400 + 625}$$

$$\Rightarrow l = \sqrt{1025}$$

$$\Rightarrow S_{xq} = \pi.25.\sqrt{1025} \approx 2514{,}5\ (cm^2)$$

b) Thể tích của khối nón là:

$$V = \frac{1}{3}\pi.r^2.h = \frac{1}{3}.\pi.25^2.20 \approx 13089{,}969\ (cm^3)$$

c) Giả sử mặt phẳng (α) cắt hình nón theo thiết diện là tam giác cân OMN. Gọi H là trung điểm của MN, ta có:

$IH \perp MN$ và $OH \perp MN \Rightarrow MN \perp (OIH)$

Từ I hạ $IK \perp OH$, khi đó $IK = 12$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (α) chứa thiết diện OMN.

Xét tam giác vuông OIH, ta có: $\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IO^2} + \frac{1}{IH^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IK^2} - \frac{1}{IO^2} = \frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2} = \frac{1}{225} \Rightarrow IH = 15cm$$

$$OH^2 = OI^2 + IH^2 = 20^2 + 15^2 \Rightarrow OH = 25cm$$

$$MN = 2.MH = 2\sqrt{IM^2 - IH^2} = 2\sqrt{25^2 - 15^2} = 40cm$$

Vậy diện tích của thiết diện là diện tích của ΔOMN và

$$S = \frac{1}{2}OH.MN = 500 \text{ cm}^2$$

Bài 4. Trong không gian cho hai điểm A, B cố định và có độ dài AB = 20cm. Gọi d là đường thẳng thay đổi luôn luôn đi qua A và cách B một khoảng bằng 10cm. Chứng tỏ rằng đường thẳng d luôn nằm trên một mặt nón, hãy xác định trục và góc ở đỉnh của mặt nón đó.

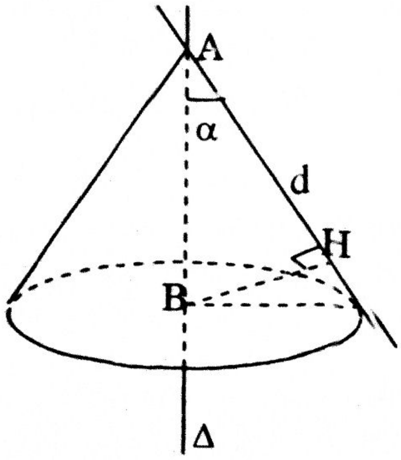
Giải

Gọi Δ là đường thẳng qua AB, H là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng d, ta có: BH = 10cm

$$\Rightarrow \sin\widehat{BAH} = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow \widehat{BAH} = 30^\circ$, hay góc giữa đường thẳng Δ và đường thẳng d là 30°.

Vậy đường thẳng d luôn luôn nằm trên mặt nón tròn xoay có trục là đường thẳng qua AB và góc ở đỉnh là $2\alpha = 60^\circ$



Bài 5. Một hình trụ có bán kính đáy r = 5cm và có khoảng cách giữa hai đáy bằng 7cm.

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ được tạo nên.

b) Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3cm. Hãy tính diện tích của thiết diện được tạo nên.

Giải

a) Áp dụng công thức, ta có:

– Diện tích xung quanh của hình trụ là:

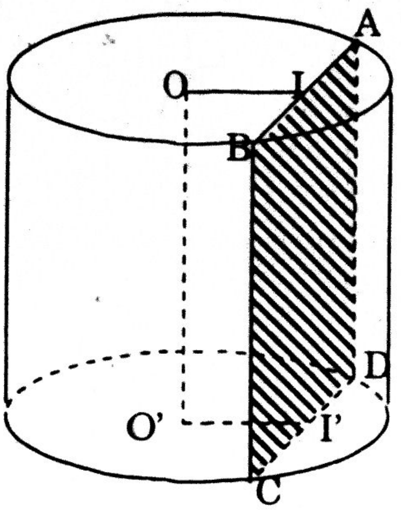
$S_{xq} = 2\pi.r.l = 2\pi.5.7 \approx 219,91 \text{ cm}^2$

– Thể tích của khối trụ là:

$V = \pi.r^2.h = \pi.5^2.7 \approx 549,77 \text{ cm}^3$

b) Ta thấy thiết diện là hình chữ nhật ABCD nằm trong mặt phẳng song song với trục OO' và cách OO' một khoảng bằng 3cm.

Kẻ $OI \perp AB$, ta có $OI \perp BC$



$\Rightarrow OI \perp mp(ABCD)$

Vậy $OI = 3cm$

Ta có: $AB = 2AI = 2\sqrt{OA^2 - OI^2}$

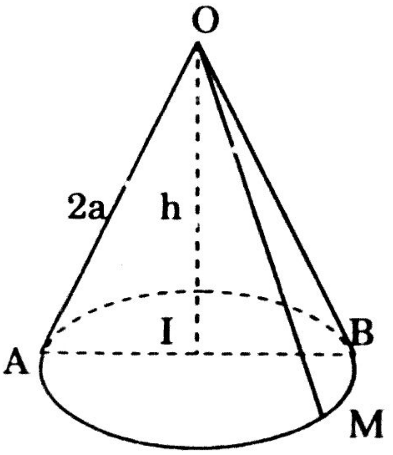
$\Rightarrow AB = 2\sqrt{25 - 9} = 8cm.$

Vậy diện tích của thiết diện là:

$S = AB.BC = 8.7 = 56cm^2$

Bài 6. Cắt một hình nón qua trục của nó ta được **thiết diện là một tam giác** đều cạnh 2a. Tính diện tích xung quanh và **thể tích của hình nón đó.**

Giải



Giả sử thiết diện là tam giác đều OAB, ta có: AB là đường kính của đường tròn đáy của hình chóp.

$\Rightarrow$ bán kính đường tròn đáy là $r = \frac{AB}{2} = a$

Đồng thời OA là đường sinh và OI là chiều cao của hình chóp, ta có:

$OA = 2a$ và $OI = \sqrt{OA^2 - IA^2} = a\sqrt{3}$

Diện tích xung quanh của hình nón là:

$$S_{xq} = \pi.r.l = 2\pi a^2$$

Thể tích của khối nón là:

$$V = \frac{1}{3}.\pi.r^2.h = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$

Bài 7. Một hình trụ có bán kính r, và chiều cao $h = r\sqrt{3}$

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn **phần của hình trụ.**

b) Tính thể tích khối trụ tạo bởi hình trụ đã cho.

c) Cho **hai điểm** A, B lần lượt nằm trên hai **đường tròn đáy sao cho góc** giữa Ab với trục của hình trụ bằng 30°. **Tính khoảng cách giữa đường** thẳng AB với trục của hình trụ.

Giải

a) Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq} = 2\pi.r.l = 2\sqrt{3}\,\pi.r^2$

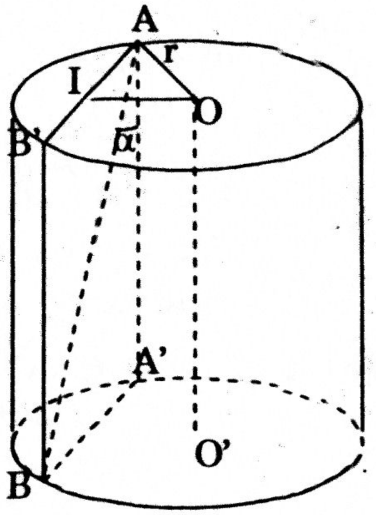
Diện tích toàn phần của hình trụ là:

$S_{TP} = S_{xq} + S_{đáy} = 2\sqrt{3}\,\pi.r^{12} + 2\pi.r^2$

$S_{TP} = 2(\sqrt{3} + 1)\pi.r^2$

b) Thể tích của khối trụ tạo bởi hình trụ là:

$V = \pi.r^2.h = \sqrt{3}\,\pi.r^3$



c) Gọi mặt phẳng (P) là mặt phẳng qua AB và (P) // OO', trục của hình trụ. Khi đó thiết diện tạo bởi mp (P) và hình trụ là hình chữ nhật AB'BA'

Góc giữa OO' và AB cũng chính là góc giữa AA' và AB (do AA' // OO')

$\Rightarrow \widehat{BAA'} = 30^o$

Ta có: $\tan\widehat{BAA'} = \dfrac{BA'}{AA'} \Rightarrow A'B = AA'.\tan\widehat{BAA'}$

$\Rightarrow A'B = \sqrt{3}.r.\tan30^o = r$

Kẻ IO ⊥ AB', I ∈ AB' $\Rightarrow IO = \sqrt{OA^2 - IA^2} = \sqrt{r^2 - \dfrac{r^2}{4}} = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$

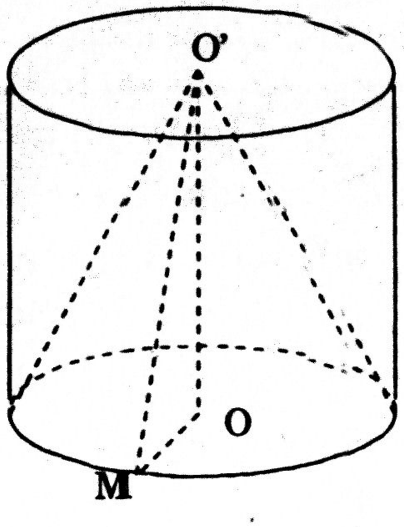
Do mặt phẳng (P) chứa hình chữ nhật AB'BA' song song với trục OO' nên khoảng cách giữa OO' và mp (P) cũng chính là khoảng cách giữa AB và OO' và bằng $OI = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

Bài 8. Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O; r) và O'; r) khoảng cách giữa hai đáy là $OO' = r\sqrt{3}$. Một hình nón có đỉnh là O' và đáy là hình tròn (O; r)

a) Gọi S_1 là diện tích xung quanh của hình trụ và S_2 là diệntích xungquanh của hình nón, hãy tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.

b) Mặt xung quanh của hình nón chia khối trụ thành hai phần„ hãy tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

Giải



a) ta có: $S_1 = 2\pi.r.h = 2\sqrt{3}.\pi.r^2$

Độ dài đường sinh của hình nón là:

$O'M = \sqrt{OM^2 + OO'^2} = 2r$

$\Rightarrow S_2 = \pi.r.l = 2.\pi.r^2$

$\Rightarrow \dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{2\sqrt{3}\pi.r^2}{2\pi.r^2} = \sqrt{3}$

b) Gọi V_1 là thể tích của khối nón

$V_1 = \frac{1}{3}\pi.r^2.h = \frac{\pi.r^3.\sqrt{3}}{3}$

Còn V_2 là thể tích của phần không gian phía ngoài khối nón và trong khối trụ.

Ta có: thể tích khối trụ: $V = \pi.r^2.h = \pi r^3\sqrt{3}$

$$\Rightarrow V_2 = V - V_1 = \pi r^3\sqrt{3} - \frac{\pi r^3\sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi r^3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$$

Bài 9. Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân và cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$.

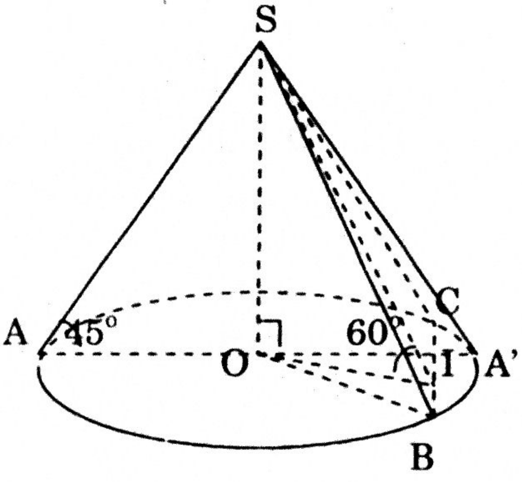
a) Tính diện tích xung quanh, diện tích đáy và thể tích của khối nón tương ứng.

b) Cho dây cung BC của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc bằng 60°. Tính diện tích tam giác SBC.

Giải

a) ta có tam giác SAA' vuông cân tại S, $AA' = a\sqrt{2}$, suy ra:

Bán kính đường tròn đáy $r = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ độ dài đường sinh $l = SA = AA'.\sin 45^\circ = a$



Diện tích xung quanh hình nón:

$$S_{xq} = \pi.r.l = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$$

Diện tích đáy hình nón là:

$$S_{đáy} = \pi.r^2 = \frac{\pi a^2}{2}$$

Thể tích của khối nón tương ứng là:

$$V = \frac{1}{3}\pi.r^2.h$$

Do $\Delta SAA'$ vuông cân nên chiều cao của khối nón là SO và $SO = \frac{AA'}{2}$

$$\Rightarrow h = SO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi.r^2.h^2 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}.\pi.a^3}{12}$$

b) Gọi I là trung điểm của dây cung BC, ta có:

$\begin{cases} OI \perp BC \\ SI \perp BC \end{cases}$ ⇒ góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng chứa đường tròn đáy là $\widehat{OIS} = 60^\circ$

Xét tam giác vuông SOI, ta có:

$$- \tan\widehat{OIS} = \frac{SO}{OI} \Rightarrow OI = \frac{SO}{\tan\widehat{OIS}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\tan 60^\circ} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$- SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

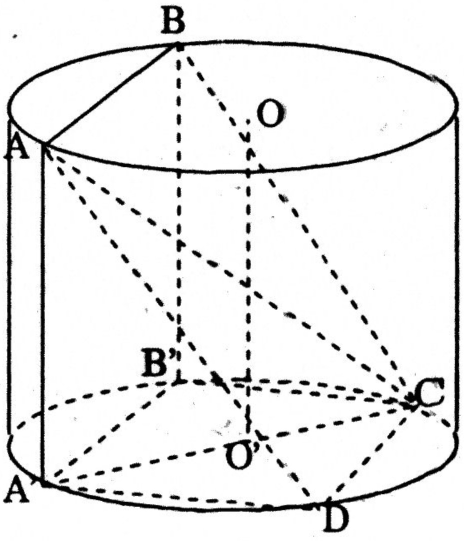
Mặt khác: $BC = 2IB = 2\sqrt{OB^2 - OI^2} = 2.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Diện tích tam giác SBC là:

$$S = \frac{1}{2}.BC.SI = \frac{1}{2}\frac{2a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$$

Bài 10. Cho hình trụ có bán kính r và chiều cao cũng bằng r. Một hình vuông ABCD có hai cạnh AB và CD lần lượt là các dây cung của hai đường tròn đáy còn cạnh BC và AD không phải là đường sinh của hình trụ. Tính diện tích của hình vuông đó và côsin góc giữa mặt phẳng chứa hình vuông và mặt phẳng đáy.

Giải



Kẻ hai đường sinh AA' và BB' của hình trụ, khi đó A'B'CD là hình chữ nhật nội tiếp đường tròn đáy của hình trụ.

Ta có: đường kính $A'C = 2r$, $AA' = r$

$\Rightarrow AC^2 = A'C^2 + AA'^2 = 5r^2$

Mặt khác ABCD là hình vuông nên

$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 2AD^2$

$$\Rightarrow AD^2 = \frac{AC^2}{2} = \frac{5}{2}r^2 \Leftrightarrow AD = \frac{r\sqrt{10}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = AD^2 = \frac{5r^2}{2}$$

Hình chữ nhật A'B'CD là hình chiếu của hình vuông ABCD lên mặt đáy hình trụ. Ta có:

$$A'D = \sqrt{A'C^2 - CD^2} = \sqrt{4r^2 - \frac{5}{2}r^2} = \frac{r\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{A'B'CD} = A'D.DC = \frac{r\sqrt{6}}{2}.\frac{r\sqrt{10}}{2} = \frac{r^2\sqrt{15}}{2}$$

Gọi α là góc giữa mặt phẳng đáy và mặt phẳng (ABCD) ta có:

$$S_{A'B'CD} = S_{ABCD}.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{S_{A'B'CD}}{S_{ABCD}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM.

1. Cho hình nón có chiều cao h và tạo với đường sinh một góc bằng 60°. Diện tích của thiết diện của hình nón với mặt phẳng đi qua hai đường sinh vuông góc bằng:

(A) h^2; **(B)** $2h^2$; **(C)** $3h^2$; **(D)** $4h^2$

2. Một hình nón đỉnh S. Mặt phẳng (α) qua đỉnh S cắt hình nón theo hai đường sinh SA, SB và hợp với nhau một góc 60°, với SA = a khoảng cách từ tâm đáy hình nón đến mặt phẳng (α) bằng:

(A) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; **(B)** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; **(C)** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; **(D)** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

3. Một hình trụ có hai đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính r, đường cao $r\sqrt{2}$. Gọi A là một điểm trên đường tròn (O) và B' là điểm nằm trên đường tròn (O') sao cho OA ⊥ O'B'. Thể tích của tứ diện OAB'O' bằng:

(A) $\frac{r^3\sqrt{3}}{3}$; **(B)** $\frac{r^3\sqrt{2}}{4}$; **(C)** $\frac{r^3\sqrt{3}}{6}$; **(D)** $\frac{r^3\sqrt{2}}{6}$.

4. Một hình trụ có bán kính r và có thiết diện qua trục là một hình vuông. Thể tích của khối trụ tương ứng là:

(A) $2\pi.r^3$; **(B)** $\pi.r^3$; **(C)** $\sqrt{2}.\pi.r^3$; **(D)** $\pi.r^3\sqrt{3}$.

5. Thiết diện qua trục của một hình nón đỉnh S là một tam giác vuông cân cạnh góc vuông bằng a. Một hình trụ có một đáy là hình tròn của hình nón và đáy còn lại là chứa đỉnh S của hình nón nói trên. Diện tích xung quanh của hình trụ là:

(A) $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$; **(B)** $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$; **(C)** πa^2; **(D)** $2\pi a^2$.

IV. ĐÁP ÁN.

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	**(B)**	**(A)**	**(D)**	**(A)**	**(C)**

§2. Mặt cầu

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Tập hợp tất cả những điểm M trong không gian cách điểm O cố định một khoảng không đổi r ($r > 0$) được gọi là mặt cầu tâm O bán kính r, kí hiệu S(O; r).

$S(O; r) = \{M \backslash OM = r\}$

2. Cho mặt cầu S(O; r) và điểm A bất kì trong không gian

– Nếu $OA = r$ thì ta nói A nằm trên mặt cầu S(O; r)

– Nếu $OA < r$ thì ta nói A nằm trong mặt cầu S(O; r)

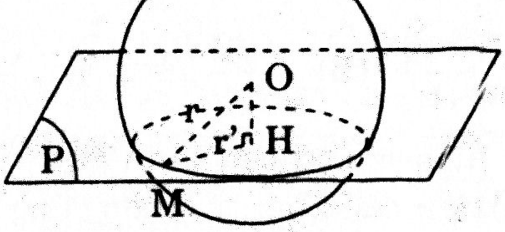
– Nếu $OA > r$ thì ta nói A nằm ngoài mặt cầu S(O; r)

Tập hợp các điểm nằm trên mặt cầu S(O; r) cùng với các điểm nằm trong mặt cầu được gọi là khối cầu hoặc hình cầu tâm O bán kính R

3. Giao của mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu S(O; r) và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (P), $h = OH$ là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P).

- $h > r$ thì mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu S(O; r)
- $h = r$ thì mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu S(O; r). Khi đó H gọi là tiếp điểm của mặt cầu và mặt phẳng, mặt phẳng (P) gọi là tiếp diện của mặt cầu S(O; r)
- $h < r$ thì mặt phẳng cắt mặt cầu theo một đường tròn tâm H, bán kính $r' = \sqrt{r^2 - h^2}$.



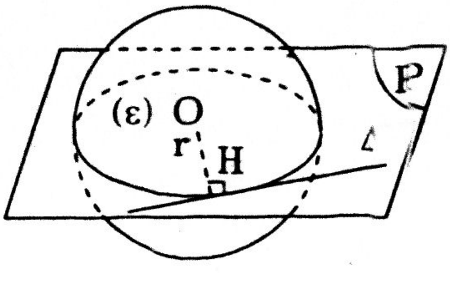
Đặc biệt nếu $h = 0$ thì $H \equiv O$ giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu S(O; r) là đường tròn tâm O, bán kính r, đường tròn này gọi là đường tròn lớn.

Chú ý: Điều kiện cần và đủ để mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M là (α) vuông góc với bán kính của mặt cầu tại điểm đó.

4. Giao của mặt cầu với đường thẳng

Cho mặt cầu S(O; r) và đường thẳng Δ, H là hình chiếu vuông góc của O lên Δ và $d = OH$ là khoảng cách từ O đến Δ.

- $d > r$ thì Δ không cắt mặt cầu S(O; r)
- $d = r$ thì Δ tiếp xúc với mặt cầu S(O; r) tại H. H được gọi là tiếp điểm, đường thẳng Δ gọi là tiếp tuyến của mặt cầu.



Chú ý: Điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu S(O; r) tại điểm H là Δ vuông góc với bán kính OH tại điểm H.

- d < r thì đường thẳng Δ cắt mặt cầu S(O; r) tại 2 điểm phân biệt

5. Công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

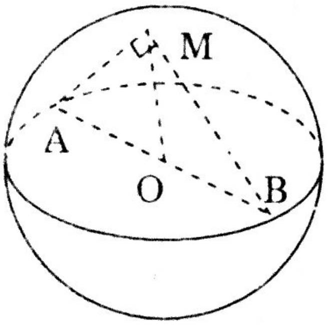
- Mặt cầu bán kính r có diện tích là: $S = 4.\pi.r^2$
- Khối cầu bán kính r có thể tích là: $V = \frac{4}{3}.\pi.r^3$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Tìm tập hợp tất cả những điểm M trong không gian luôn nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới một góc vuông.

Giải

Gọi O là trung điểm của AB.



Xét tam giác vuông MAB, vuông tại M, ta có:

$OM = OA = OB = \frac{AB}{2}$

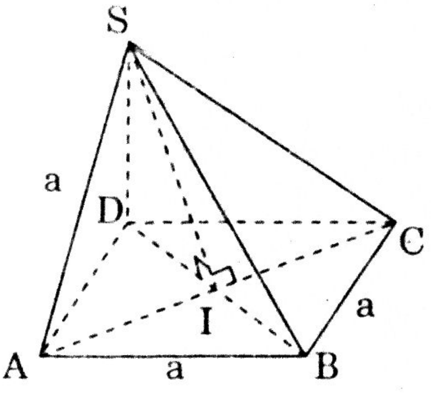
Do O cố định, $\frac{AB}{2}$ là số không đổi, nên tập hợp các điểm M trong không gian nhìn AB dưới một góc vuông là mặt cầu tâm O, bán kính $r = \frac{AB}{2}$.

Bài 2. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

Giải

Do S.ABCD là hình chóp tứ giác đều nên ABCD là hình vuông và chân đường cao của S.ABCD trùng với tâm I của ABCD tức là SI ⊥ (ABCD).

Xét tam giác vuông SIA, có:



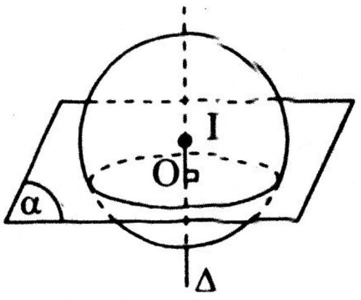
$IA = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$SI = \sqrt{SA^2 - IA^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow SI = IA = IB = IC = ID = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy, mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có tâm là I, và bán kính $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Bài 3. Tìm tập hợp tâm các mặt cầu luôn luôn chứa một đường tròn cố định cho trước.



Giải

Gọi đường tròn $(\mathscr{C})$ tâm O bán kính r cố định cho trước và nằm trên mặt phẳng (α) cố định.

Gọi I là tâm của mặt cầu (S) đi qua đường tròn $(\mathscr{C})$. Khi đó mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (α) theo giao tuyến là đường tròn $(\mathscr{C})$ nên O là hình chiếu vuông góc của I trên mp (α), hay IO ⊥ mp (α).

Suy ra, I nằm trên đường thẳng Δ vuông góc với mp (α) tại O.

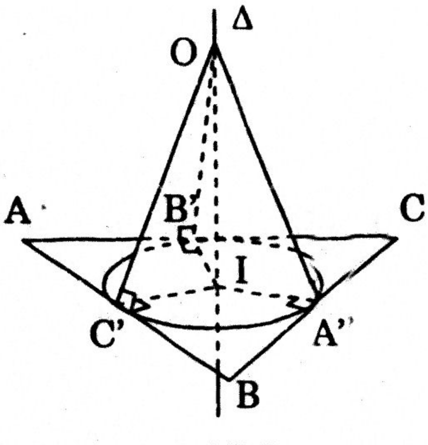
Ngược lại, với mọi điểm I ∈ Δ, ta có: khoảng cách từ I đến mọi điểm trên $(\mathscr{C})$ đều bằng nhau. Suy ra I là tâm mặt cầu (S) luôn đi qua $(\mathscr{C})$.

Vậy, tập hợp tâm các mặt cầu luôn chứa đường tròn cố định cho trước là đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn đó tại tâm của nó.

Bài 4. Tìm tập hợp tâm những mặt cầu luôn cùng tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác cho trước.

Giải

Giả sử mặt cầu S(O; r) tiếp xúc với 3 cạnh BC, AC, AB của tam giác ABC lần lượt tại A', B', C'. Gọi I là hình chiếu vuông góc của O lên mp (ABC



Vì OA' ⊥ BC nên IA' ⊥ BC; tương tự IB' ⊥ AC nên IC' ⊥ AB

⇒ IA' = IB' = IC' = r' hay I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Vậy O thuộc trục đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Đảo lại, nếu lấy O thuộc trục Δ của đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì ta có: IA' = IB' = IC', do đó OA' = OB' = OC' = r

Suy ra, mặt cầu S(O; r) tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC.

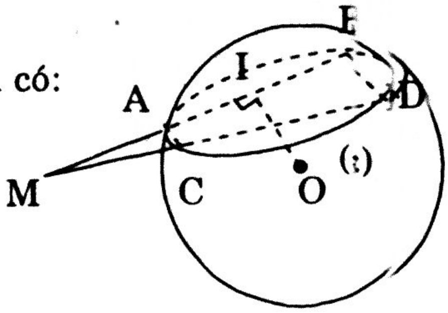
Vậy, tập hợp tâm những mặt cầu cùng tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác cho trước là trục của đường tròn nội tiếp tam giác cho trước.

Bài 5. Từ một điểm M nằm ngoài mặt cầu S(O; r) ta kẻ hai đường thẳng cắt mặt cầu lần lượt tại A, B và C, D.

a) Chứng minh rằng MA.MB = MC.MD

b) Gọi MO = d. Tính MA.MB theo d và r.

Giải



a) Gọi (α) là mặt phẳng chứa MA và MC, ta có:

Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu S(O; r) theo một đường tròn (V) và A, B, C, D thuộc (V).

Ta có: ΔMAC đồng dạng ΔMDB

$$\Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$$

$\Rightarrow MA.MB = MC.MD$

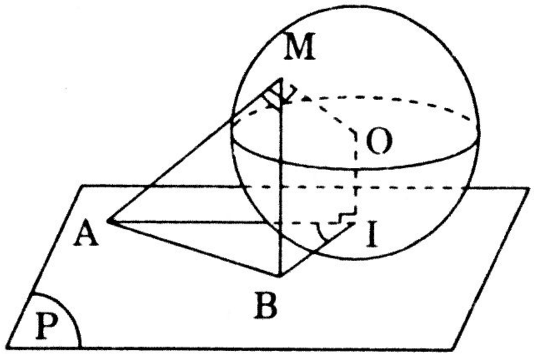
b) Gọi I là trung điểm của AB thì $IO \perp AB$ (vì $OA = OB = r$)

Ta có: $MA.MB = (MI - IA)(MI + IB) = MI^2 - IA^2 = (MO^2 - OI^2) - (OA^2 - OI^2)$ $= MO^2 - OA^2 = d^2 - r^2$

Vậy $MA.MB = d^2 - r^2$

Bài 6. Cho mặt cầu S(O; r) tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại I. Gọi M là một điểm nằm trên mặt cầu nhưng không phải là điểm đối xứng với I qua tâm O. Từ M kẻ hai tiếp tuyến của mặt cầu cắt (P) tại A và B. Chứng minh rằng $\widehat{AMB} = \widehat{AIB}$

Giải



Vì mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu S(O; r) tại I nên AI và BI là hai tiếp tuyến với mặt cầu S(O; r)

Vì AM và AI là hai tiếp tuyến của mặt cầu kẻ từ A nên: MA = AI, tương tự ta có: $BM = BI \Rightarrow \Delta AMB = \Delta AIB$ (c – c – c)

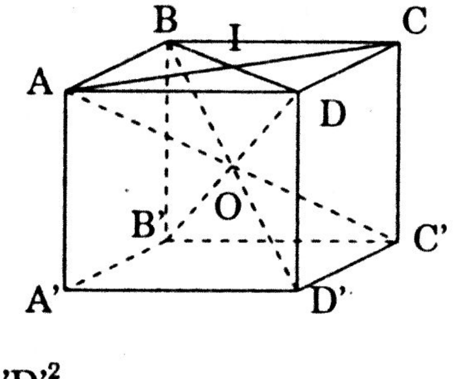
Vậy $\widehat{AMB} = \widehat{AIB}$.

Bài 7. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AA' = a, AB = b, AD = c.

a) Xác định tâm và bán kính mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình hộp đó

b) Tính bán kính của đường tròn là giao tuyến của mặt phẳng (ABCD) với mặt cầu nói trên.

Giải



a) Vì các đường chéo của hình hộp chữ nhật bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường nên:

OA = OB = OC = OD = OA' = OB' = OC' = OD' = r.

$\Rightarrow$ O là tâm mặt cầu đi qua tám đỉnh của hình hộp chữ nhật

Ta có: $AC'^2 = AA'^2 + A'C'^2 = AA'^2 + A'B'^2 + A'D'^2$

$AC'^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{2}AC' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

b) Đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (ABCD) và mặt cầu nói trên là đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD.

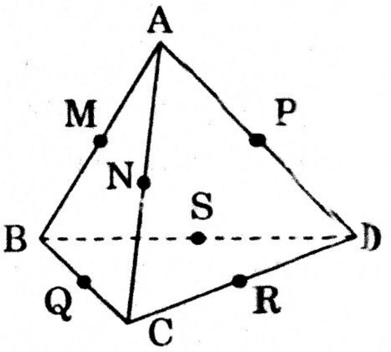
Gọi I là giao của hai đường chéo AC và BD, ta có: $IA = IB = IC = ID = r'$

$$\Rightarrow r' = \frac{AC}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2}$$

Vậy $r' = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2}$.

Bài 8. Chứng minh rằng nếu có mặt cầu tiếp xúc với 6 cạnh của một hình tứ diện thì tổng độ dài của các cặp cạnh đối diện của tứ diện bằng nhau.

Giải



Giả sử có mặt cầu (S) tiếp xúc với các cạnh AB, AC, AD, CB, CD, BD lần lượt tại M, N, P, Q, R, S. Khi ấy AM, AN, AP là tiếp tuyến của mặt cầu (S) kẻ từ A nên:

$AM = AN = AP = a$.

Tương tự, ta có: $BM = BQ = BS = b$

$CQ = CN = CR = c$

$DP = DR = DS = d$

$\Rightarrow AB + CD = AM + BM + CR + DR = a + b + c + d$

Tương tự, ta có: $AC + BD = a + b + c + d$

$AD + BC = a + b + c + d$

Vậy, tổng các cặp cạnh đối của tứ diện thì bằng nhau.

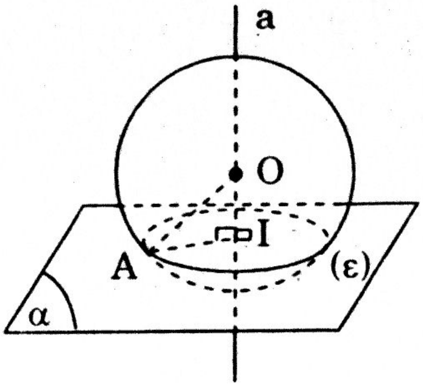
Bài 9. Cho một điểm A cố định và một đường thẳng a cố định không đi qua A. Gọi O là một điểm thay đổi trên a. Chứng minh rằng mặt cầu tâm O bán kính $r = OA$ luôn đi qua một đường tròn cố định.

Giải

Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với a tại I. Ta có mp (α) cố định và điểm I cũng cố định.

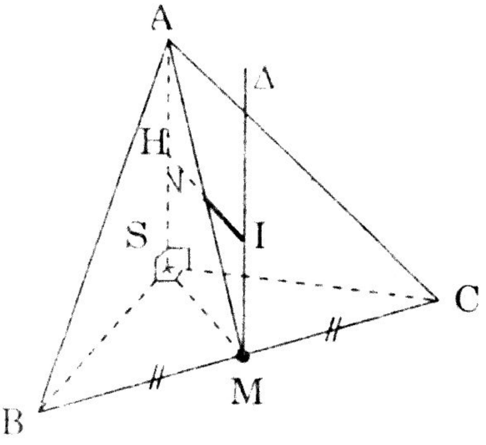
Mp (α) cắt mặt cầu S(O; r) theo đường tròn $\mathscr{C}$ (I; IA) cố định, vì $(\mathscr{C})$ nằm trong mp (α) cố định, tâm I cố định, IA không đổi

Vậy, mặt cầu S(O; r) luôn đi qua đường tròn cố định $\mathscr{C}$ (I; IA)



Bài 10. Cho hình chóp S.ABC có 4 đỉnh đều nằm trên một mặt cầu SA = a, SB = b, SC = c và cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc. Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu được tạo bởi mặt cầu đó.

Giải



Gọi M là trung điểm của BC, qua M kẻ trục Δ của tam giác SBC thì Δ // SA.

Kẻ mặt phẳng trung trực của SA cắt Δ tại I, ta có I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC.

IA = IB = IC = IS = r

Bán kính mặt cầu là:

$$r = IS = \sqrt{IM^2 + OM^2}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi.r^2 = \pi(a^2 + b^2 + c^2)$

Thể tích khối cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi.r^3 = \frac{\pi}{6}(a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Cho hình chóp tứ giác đều O.ABCD có cạnh đáy AB = 2 cạnh bên OA = 2. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là:

(A) $\sqrt{2}$; **(B)** $2\sqrt{2}$; **(C)** 1; **(D)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

2. Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt cầu S(O; r); khoảng cách từ O đến mp (α) bằng $\frac{3}{2}$, khi đó giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng:

(A) $\frac{1}{2}$; **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **(C)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$; **(D)** $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

3. Bán kính mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình lập phương cạnh a bằng:

(A) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; **(B)** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; **(C)** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$; **(D)** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

4. Cho hình chóp S.ABC với SA = SB = SC và SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng:

(A) $\frac{3a\pi}{4}$; **(B)** $3a\pi$; **(C)** $\frac{a\pi\sqrt{3}}{4}$; **(D)** $a\pi\sqrt{3}$.

5. Thể tích của khối cầu tạo bởi mặt cầu ngoại tiếp một tứ diện đều cạnh a bằng:

(A) $\frac{a^3\pi\sqrt{6}}{2}$; **(B)** $\frac{a^3\pi\sqrt{6}}{4}$; **(C)** $\frac{a^3\pi\sqrt{6}}{8}$; **(D)** $\frac{a^3\pi\sqrt{6}}{3}$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	**(B)**	**(D)**	**(A)**	**(B)**	**(C)**

ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 1. Cho ba điểm A, B, C cùng thuộc một mặt cầu và cho biết $\widehat{ACB} = 90^0$.. Trong các khẳng định sau khẳng định nào là đúng ?

a) Đường tròn qua 3 điểm A, B, C nằm trên mặt cầu

b) AB là đường kính của mặt cầu đã cho

c) AB không phải là đường kính của mặt cầu

d) AB là đường kính của đường tròn giao tuyến tạo bởi mặt cầu và mặt phẳng (ABC).

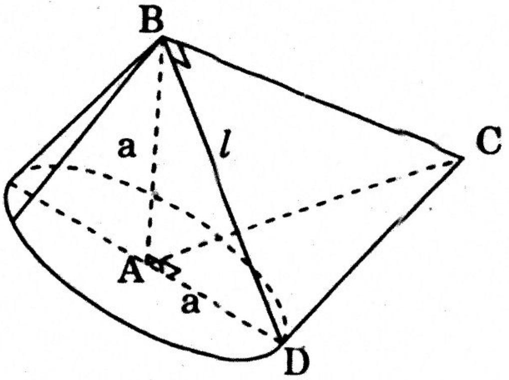
Giải

Khẳng định **a)** Đường tròn qua 3 điểm ABC nằm trên mặt cầu là khẳng định đúng.

Khẳng định **d)** là khẳng định đúng.

Bài 2. Cho tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cạnh BD vuông góc với BC. Biết AB = AD = a. Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích của khối nón được tạo thành khi quay đường gấp khúc BDA quanh AB.

Giải



Khi quay đường gấp khúc BDA quanh cạnh AB ta được mặt nón có đỉnh B, đường sinh BD

Ta có: $\begin{cases} AD \perp (ABC) \\ BC \perp BD \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp BD \end{cases} \Rightarrow BC \perp BA$

Do vậy tam giác ABC vuông tại B nên $\widehat{BAC} < 90^0$ và mặt đáy của mặt nón không nằm trên mặt phẳng (ACD)

Ta có: $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$ (do ΔABD vuông tại A)

Diện tích xung quanh của mặt nón là: $S_{xq} = \pi r.l = \pi.AD.BD = \pi a^2.\sqrt{2}$

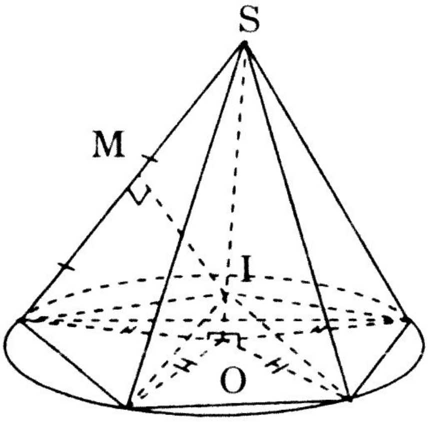
Thể tích của khối nón tạo bởi mặt nón nói trên là:

$$V = \frac{1}{3}\pi.r^2.h = \frac{1}{3}\pi.AD^2.AB = \frac{\pi a^3}{3}$$

Bài 3. Chứng minh một hình chóp có tất cả các mặt bên bằng nhau nội tiếp được trong một mặt cầu.

Giải

Gọi O là hình chiếu của S lên mặt đáy. Do các cạnh bên của hình chóp bằng nhau nên O cách đều các đỉnh của đa giác đáy. Như vậy đáy của hình chóp là một đa giác nội tiếp đường tròn tâm O và nhận SO làm trục.



Gọi I là giao điểm của SO và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên, ta có I cách đều tất cả các đỉnh của hình chóp một đoạn $r = SI$.

Vậy hình chóp luôn nội tiếp một mặt cầu $S(I; r)$.

Bài 4. Hình chóp SABC có một mặt cầu tiếp xúc với các cạnh bên SA, SB, SC và tiếp xúc với ba cạnh AB, BC, CA tại trung điểm của mỗi cạnh. Chứng minh rằng hình chóp đó là hình chóp tam giác đều.

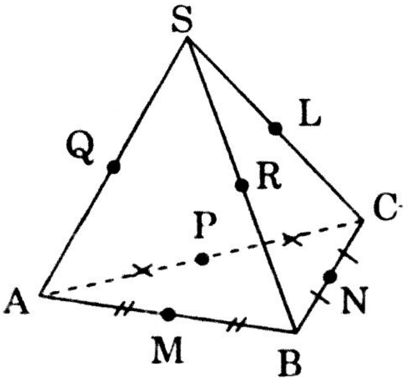
Giải

Giả sử mặt cầu (S) tiếp xúc với các cạnh SA, SB, SC tại Q, R, L và tiếp xúc với AB, BC, CA tại các trung điểm M, N, P, ta có: SQ, SR, SL là tiếp tuyến của (S) kẻ từ S nên: $SQ = SR = SL = a$

Tương tự, ta có: $AQ = AM = AP = b$

$BM = BR = BN = c$

$CN = CP = CL = d$



Mặt khác do M, N, P là trung điểm của AB, BC, CA, suy ra

$AP = PC \Rightarrow b = d$

$AM = BM \Rightarrow b = c$

$\Rightarrow AB = BC = CA = 2b = 2c = 2d$

hay ΔABC là tam giác đều. (1)

Ta có: $SA = a + b$, $SB = a + c$, $SC = a + d$

$\Rightarrow SA = SB = SC$ (2)

Từ (1) và (2) ta có S.ABC là hình chóp tam giác đều.

Bài 5. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (BCD)

a) Chứng minh rằng H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Tính độ dài AH.

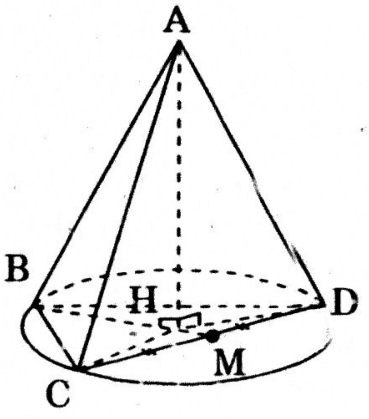
b) Tính diện tích xung quanh và thể tích của khối trụ có đường tròn đáy ngoại tiếp tam giác BCD và chiều cao AH.

Giải

a) Xét 3 tam giác AHB, AHC, AHD có: chung cạnh AH
và AB = AC = AD = a

$\Rightarrow \Delta AHB = \Delta AHC = \Delta AHD$

$\Rightarrow$ HB = HC = HD hay H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.



Do ΔBCD là tam giác đều và BM là trung trực của ΔBCD nên BM cũng là trung tuyến

$$\Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BH = \frac{2}{3}BM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Xét tam giác vuông ABH, ta có:

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

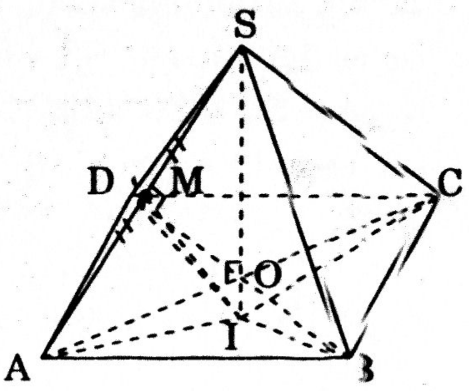
b) Hình trụ có đường tròn đáy ngoại tiếp ΔBCD và chiều cao AH thì bán kính hình trụ là

$$r = BH = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_{xq} = 2\pi.r.AH = 2\pi.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$$

Thể tích của khối trụ là: $V = \pi.r^2.AH = \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2.\frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{9}$

Bài 6. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Từ tâm O của hình vuông dựng đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Trên Δ lấy điểm S sao cho $OS = \frac{a}{2}$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD. Tính diện tích của mặt cầu và thể tích của khối cầu được tạo nên bởi mặt cầu đó.

Giải



Do O là tâm của hình vuông ABCD cũng là tâm của đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD nên đường thẳng Δ là trục của đường tròn đó.

Gọi I là giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng trung trực của cạnh SA, khi đó IS = IA = IB = IC = ID = r hay mặt cầu S(I; r) là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD

Ta có ΔSMI đồng dạng ΔSOA

$$\Rightarrow \frac{SI}{SA} = \frac{SM}{SO} \Leftrightarrow SI = \frac{SA.SM}{SO} = \frac{SA^2}{2SO}$$

(Trong đó $SA^2 = OA^2 + SO^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$)

⇒ bán kính $r = SI = \dfrac{\frac{3a^2}{4}}{2.\frac{a}{2}} = \frac{3a}{4}$

Diện tích mặt cầu S(I; r) là: $S = 4\pi.r^2 = \frac{9\pi a^2}{4}$

Thể tích của khối cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi.r^3 = \frac{9\pi a^3}{16}$

Bài 7. Cho hình trục có bán kính r, trục OO' = 2r và mặt cầu đường kính OO'

a) Hãy so sánh diện tích mặt cầu và diện tích xung quanh của mặt trụ

b) Hãy so sánh thể tích khối trụ và thể tích khối cầu tạo nên bởi hình trụ và mặt cầu đã cho

Giải

a) Ta có: Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi.r.h = 4\pi r^2$

Diện tích mặt cầu bán kính r là: $S = 4\pi.r^2$

Vậy diện tích mặt cầu và diện tích xung quanh của hình trụ nói trên là bằng nhau

b) Thể tích của khối trụ là: $V_T = \pi.r^2.h = 2\pi r^3$

Thể tích của khối cầu là: $V_C = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{V_T}{V_C} = \dfrac{2\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi.r^3} = \frac{3}{2}$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

A. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi S là diện tích xung quanh của hình trụ có hai đường tròn đáy ngoại tiếp hai hình vuông ABCD và A'B'C'D'. Diện tích S là:

(A) πa^2; **(B)** $\pi a^2\sqrt{2}$; **(C)** $\pi a^2\sqrt{3}$; **(D)** $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$

2. Gọi S là diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay được sinh bởi đoạn thẳng AC' của hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh b khi quay xung quanh trục AA'. Diện tích S là:

(A) πb^2; **(B)** $\pi b^2\sqrt{2}$; **(C)** $\pi b^2\sqrt{3}$; **(D)** $\pi b^2\sqrt{6}$.

3. Hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC vuông tại A, có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có SA = a, AB = b, AC = c. Mặt cầu đi qua các đỉnh S, A, B, C có bán kính r bằng:

(A) $\frac{2(a+b+c)}{3}$; **(B)** $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;

(C) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; **(D)** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

4. Cho hai điểm cố định A, B và một điểm M di động trong không gian nhưng luôn thỏa mãn điều kiện $\widehat{MAB} = \alpha$ với $0^0 < \alpha < 90^0$. Khi đó M thuộc mặt nào trong các mặt sau:

(A) Mặt nón; **(B)** Mặt trụ; **(C)** Mặt cầu; **(D)** Mặt phẳng.

5. Số mặt cầu chứa một đường tròn cho trước là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** vô số.

6. Trong các đa diện sau đây đa diện nào không luôn luôn nội tiếp được trong mặt cầu:

(A) hình chóp tam giác (tứ diện); **(B)** hình chóp ngũ giác đều;

(C) hình chóp tứ giác; **(D)** hình hộp chữ nhật.

7. Cho tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cạnh BD vuông góc với BC. Khi quay các cạnh của tứ diện đó xung quanh trục là cạnh AB có bao nhiêu hình nón được tạo thành ?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

8. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Một hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông ABCD và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông A'B'C'D'. Diện tích xung quanh của hình nón đó là:

(A) $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$; **(B)** $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$; **(C)** $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$; **(D)** $\frac{\pi a^2\sqrt{6}}{2}$.

9. Cho tam giác đều ABC cạnh a quay xung quanh đường cao AH tạo nên một hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón đó là:

(A) πa^2; **(B)** $2\pi a^2$; **(C)** $\frac{1}{2}\pi a^2$; **(D)** $\frac{3}{4}\pi a^2$.

10. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai ?

(A) Mặt trụ và mặt nón có chứa các đường thẳng;

(B) Mọi hình chóp luôn luôn nội tiếp trong mặt cầu;

(C) Có vô số mặt phẳng cắt mặt cầu theo những đường tròn bằng nhau;

(D) Luôn luôn có hai đường tròn có bán kính khác nhau cùng nằm trên một mặt nón.

11. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng r. Gọi O; O' là tâm của hai đáy với OO' = 2r. Một mặt cầu (S) tiếp xúc với hai đáy của hình trụ tại O và O'. Trong các mệnh đề dưới đây mệnh đề nào sai ?

(A) Diện tích mặt cầu bằng diện tích xung quanh của hình trụ;

(B) Diện tích mặt cầu bằng $\frac{2}{3}$ diện tích toàn phần của hình trụ;

(C) Thể tích khối cầu bằng $\frac{3}{4}$ thể tích của khối trụ;

(D) Thể tích khối cầu bằng $\frac{2}{3}$ thể tích của khối trụ.

12. Một hình hộp chữ nhật nội tiếp mặt cầu và có ba kích thước là a, b, c. Khi đó bán kính r của mặt cầu bằng:

(A) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; **(B)** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;

(C) $\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$; **(D)** $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{3}$.

13. Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt của hình lập phương cạnh a. Thể tích của khối trụ là:

(A) $\frac{1}{2}a^3\pi$; **(B)** $\frac{1}{4}a^3\pi$; **(C)** $\frac{1}{3}a^3\pi$; **(D)** $a^3\pi$.

14. Một hình tứ diện đều cạnh a có một đỉnh trùng với đỉnh của hình nón, ba đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy của hình nón. Khi đó diện tích xung quanh của hình nón là:

(A) $\frac{1}{2}\pi a^2\sqrt{3}$; **(B)** $\frac{1}{3}\pi a^2\sqrt{2}$; **(C)** $\frac{1}{3}\pi a^2\sqrt{3}$; **(D)** $\pi a^2\sqrt{3}$.

15. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai ?

(A) Có một mặt cầu ngoại tiếp một tứ diện bất kì;

(B) Có một mặt cầu ngoại tiếp một hình chóp đều;

(C) Có một mặt cầu ngoại tiếp một hình hộp;

(D) Có một mặt cầu ngoại tiếp một hình hộp chữ nhật.

16. Người ta bỏ ba quả bóng bàn cùng kích thước vào trong một chiếc hộp hình trụ có đáy bằng hình tròn lớn của quả bóng bàn và chiều cao bằng 3 lần đường kính quả bóng bàn. Gọi S_1 là tổng diện tích của 3 quả bóng bàn, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng:

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 1,5; **(D)** 1,2.

17. Người ta xếp 7 viên bi có cùng bán kính r vào một cái lọ hình trụ sao cho tất cả các viên bi đều tiếp xúc với đáy viên bi nằm chính giữa tiếp xúc với 6 viên bi xung quanh và mỗi viên bi xung quanh đều tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ. Khi đó diện tích đáy của lọ hình trụ là:

(A) $16\pi r^2$; **(B)** $18\pi r^2$; **(C)** $9\pi r^2$; **(D)** $36\pi r^2$.

18. Cho ba điểm A, B, C nằm trên một mặt cầu, biết rằng góc $\widehat{ACB} = 90^0$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng ?

(A) AB là một đường kính của mặt cầu;

(B) Luôn luôn có một đường tròn nằm trên mặt cầu ngoại tiếp tam giác ABC;

(C) Tam giác ABC vuông cân tại C;

(D) Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu theo một giao tuyến là đường tròn lớn.

B. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Đáp án	**(B)**	**(D)**	**(C)**	**(A)**	**(D)**	**(C)**	**(B)**	**(C)**	**(C)**

Câu	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Đáp án	**(B)**	**(C)**	**(A)**	**(B)**	**(B)**	**(C)**	**(A)**	**(C)**	**(B)**

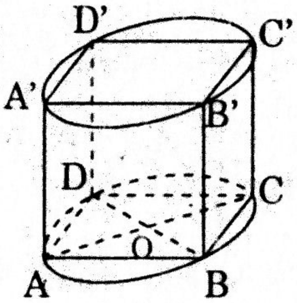
C. HƯỚNG DẪN GIẢI

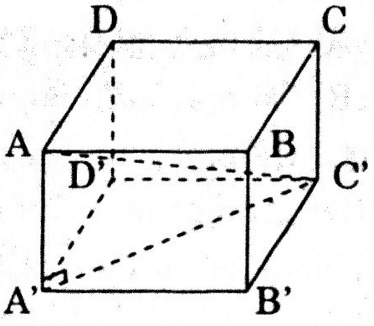
1. Bán kính của hình trụ là:

$$r = OA = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{xq} = 2\pi rAA' = \pi a^2\sqrt{2}$$

Vậy, chọn đáp án **(B)**



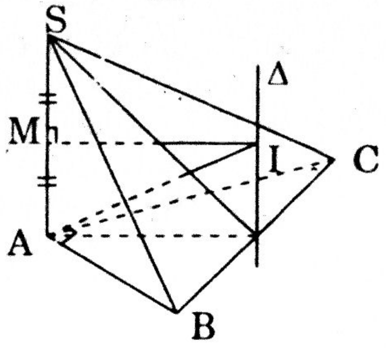


2. Ta có, bán kính của đường tròn đáy là $A'C' = b\sqrt{2}$. Khi đó diện tích xung quanh của hình nón đã cho là

$$S_{xq} = \pi.r.AC' = \pi.b\sqrt{2}.b\sqrt{3}$$

$S_{xq} = \pi b^2\sqrt{6}$. Vậy, chọn đáp án **(D)**.

3. Gọi O là trung điểm của BC $\Rightarrow$ O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường thẳng Δ là trục của đường tròn tâm O.

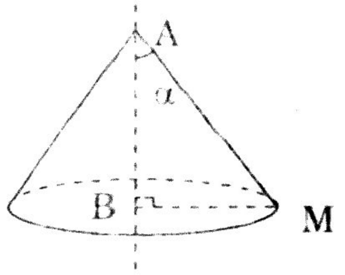


Gọi I là giao điểm của mặt phẳng trung trực của SA và Δ. Khi đó I là tâm của mặt cầu đi qua A, B, C, S và r = IA

$$r = IA = \sqrt{OA^2 + IO^2}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$ Vậy, chọn đáp án **(C)**.

4. Do $\widehat{MAB} = \alpha$ $(0^0 < \alpha < 90^0)$ nên M luôn nằm trên những đường thẳng tạo với AB một góc không đổi α. Những đường thẳng này tạo thành một mặt nón xác định



⇒ M luôn luôn nằm trên một mặt nón xác định. Vậy, chọn đáp án **(A)**.

5. Có vô số mặt cầu chứa một đường tròn cho trước. Vậy, chọn **(D)**.

6. Ta có hình chóp tứ giác có đáy là hình bình hành thì không nội tiếp trong một mặt cầu (vì đáy không nội tiếp đường tròn). Vậy **(C)** là đáp án sai.

7. Ta có AD ⊥ (ABC) ⇒ AD ⊥ BC

Mặt khác: BC ⊥ BD

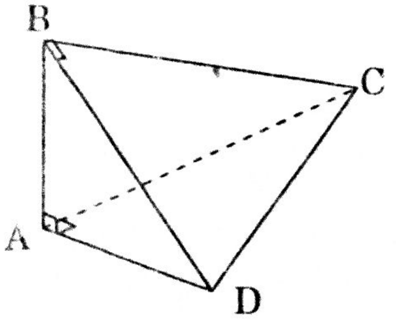
Từ (1) và (2), ta có: BC ⊥ AB

⇒ ΔABC vuông tại B nên cạnh AC quay quanh AB tạo thành một hình nón.

Tương tự ΔABD là tam giác vuông tại A nên BD quay quanh AB tạo thành một hình nón

Vậy, có hai hình nón được tạo thành.

Chọn, đáp án **(B)**.



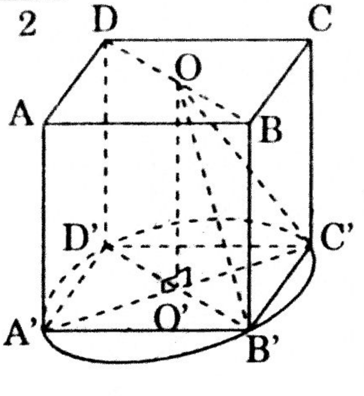
8. Bán kính mặt đáy hình chóp là: $O'A' = \frac{1}{2}A'C' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Đường sinh của hình nón là: $OB' = \sqrt{OB^2 + BB'^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

⇒ Diện tích xung quanh của mặt nón là:

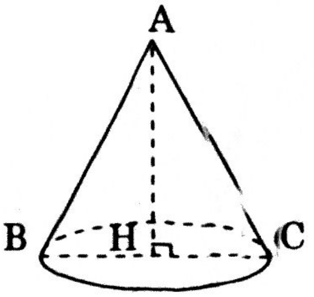
$$S_{xq} = \pi.O'A'.OB' = \frac{\pi.a^2.\sqrt{3}}{2}$$

Vậy chọn đáp án **(C)**.



9. Hình nón có bán kính mặt đáy là: $BH = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$ và đường sinh AB = a

$\Rightarrow S_{xq} = \pi\frac{a}{2}.a = \frac{\pi a^2}{2}$. Đáp án đúng là (C).



10. Mệnh đề sai là mệnh đề (B).

11. Ta có: mặt cầu có bán kính là r, khi đó:

Diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi.r^2$

Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq} = 4\pi.OO'.r = 4\pi.r^2 \Rightarrow S = S_{xq}$

Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S_{TP} = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2 \Rightarrow \frac{S}{S_{TP}} = \frac{2}{3}$

Thể tích khối cầu là: $V_C = \frac{4}{3}\pi r^3$

Thể tích của khối trụ là: $V_T = 2\pi r^3 \Rightarrow \frac{V_C}{V_T} = \frac{2}{3}$. Vậy, đáp án sai là (C).

12. Tâm mặt cầu là giao của các đường chéo của hình hộp chữ nhật còn bán kính là bằng nửa đường chéo $\Rightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Chọn (A).

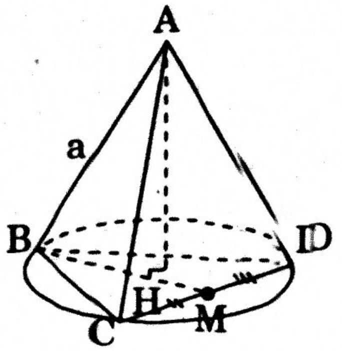
13. Do hình tròn nội tiếp hình vuông cạnh a thì bán kính của hình tròn là $r = \frac{a}{2}$, và chiều cao hình trụ là a.

$\Rightarrow V = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.a = \frac{1}{4}a^3\pi$. Đáp án (B) là đúng.

14. H là hình chiếu của đỉnh A lên mp (BCD) ta có H là tâm đường tròn đáy của hình chóp và bán kính đường tròn này là:

$r = BH = \frac{2}{3}BM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Chiều cao $AH = \sqrt{BA^2 - HB^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$



$\Rightarrow$ Diện tích xung quanh của hình nón là: $S = \pi.r.AH = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$

Vậy, chọn đáp án (B).

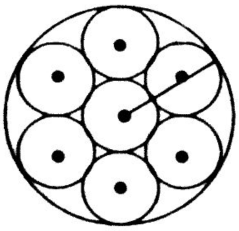
15. Đáp án (C) là mệnh đề sai.

16. Gọi r là bán kính của quả bóng bàn, khi đó bán kính của đường tròn đáy của hình trụ là r, chiều cao của hình trụ là h = 6r

$\Rightarrow S = 3.(4\pi.r^2) = 12\pi r^2$; $S_2 = 2\pi.r.h = 12\pi r^2$

$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = 1$. Vậy, chọn đáp án **(A)**.

17. Ta có hình vẽ cắt ngang "7 viên bi" bởi một mặt phẳng song song với mặt đáy của lọ hình trụ, khi đó bán kính của đáy lọ hình trụ là: 3r.



$\Rightarrow$ Diện tích đáy lọ hình trụ là: $S = \pi(3r)^2 = 9\pi r^2$

Vậy chọn đáp án **(C)**.

18. Do $\widehat{ACB} = 90^0$ nên A, B, C nằm trên một đường tròn và đường tròn này phải nằm trên mặt cầu.

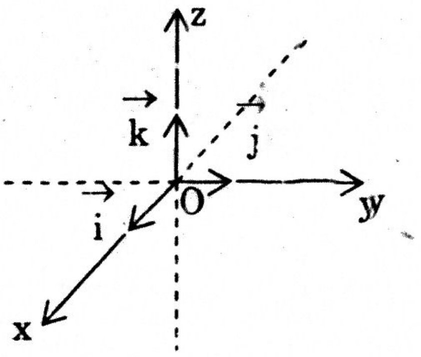
Vậy chọn đáp án **(B)**.

Chương III.
PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. Hệ tọa độ trong không gian

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hệ tọa độ: Trong không gian cho ba trục x'Ox, y'Oy, z'Oz vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục x'Ox, y'Oy, z'Oz. Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Đề-các vuông góc Oxyz trong không gian, hay đơn giản được gọi là hệ tọa độ Oxyz.



2. Tọa độ giao điểm

Trong không gian, cho hệ trục tọa độ Oxyz và một điểm M tùy ý. Khi đó do $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ không đồng phẳng nên tồn tại duy nhất bộ ba số (x; y; z) sao cho $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Ta nói bộ ba số (x; y; z) là tọa độ của điểm M đối với hệ trục tọa độ Oxyz đã cho và viết M = (x; y; z) hoặc M(x; y; z). Như vậy: M(x; y; z) ⇔ $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

3. Tọa độ của vectơ: Trong không gian Oxyz cho vectơ $\vec{a}$, ta luôn có $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$. Khi đó bộ ba số ($a_1$; a_2; a_3) được xác định duy nhất và được gọi là tọa độ của vectơ $\vec{a}$ đối với hệ trục tọa độ Oxyz và viết: $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$. Như vậy

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}.$$

4. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ.

* Định lý: Đối với hệ trục Oxyz nếu có hai vectơ $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ thì:

a) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$;

b) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$;

c) $k\vec{a} = k(a_1; a_2; a_3) = (ka_1; ka_2; ka_3)$, với $k \in R$

* Hệ quả

a) Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có: $\vec{a} = \vec{b}$; $\Leftrightarrow a_1 = b_1$; $a_2 = b_2$; $a_3 = b_3$.

b) Vectơ $\vec{0}$ có tọa độ là (0; 0; 0)

c) Với $\vec{b} \neq \vec{0}$ thì hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi có một số k sao cho:

$$a_1 = kb_1;\ a_2 = kb_2;\ a_3 = kb_3.$$

d) Trong không gian Oxyz, nếu hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$ thì $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

5. Tích vô hướng (Biểu thức tọa độ của tích vô hướng)

Trong không gian Oxyz, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Như vậy:

a) Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, độ dài vectơ $\vec{a}$ là: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

b) Cho $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ thì

$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

c) Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ với $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ thì: $\cos\varphi = \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

d) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

6. Phương trình mặt cầu

* Định lý: Trong không gian Oxyz, mặt cầu (S) tâm I(a; b; c), bán kính r có phương trình là: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

* Phương trình dạng: $x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0$ với điều kiện $A^2+B^2+C^2-D>0$ là phương trình mặt cầu tâm I(–A; –B; –C) bán kính $r=\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Các bài tập sau đây đều xét trong không gian Oxyz

Bài 1. Cho ba vectơ $\vec{a}=(2;-5;3)$, $\vec{b}=(0;2;-1)$, $\vec{c}=(1;7;2)$.

a) Tính tọa độ của vectơ $\vec{d}=4\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+3\vec{c}$;

b) Tính tọa độ của vectơ $\vec{e}=\vec{a}-4\vec{b}-2\vec{c}$

Giải

a) Ta có $\vec{d}=4(2;-5;3)-\frac{1}{3}(0;2;-1)+3(1;7;2)$

$$=\left(4.2-\frac{1}{3}.0+3.1\ ;\ 4.(-5)-\frac{1}{3}.2+3.7\ ;\ 4.3-\frac{1}{3}.(-1)+3.2\right)$$

$$=\left(11;\frac{1}{3};\frac{55}{3}\right)$$

b) Ta có $\vec{e}=\vec{a}-4\vec{b}-2\vec{c}$

$$=(2;-5;3)-4(0;2;-1)-2(1;7;2)$$

$$=\left(2-4.0-2.1\ ;\ -5-4.2-2.7\ ;\ 3-4.(-1)-2.2\right)$$

$$=(0;-27;3)$$

Bài 2. Cho ba điểm A(1; –1; 1), B(0; 1; 2), C(1; 0; 1). Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải

Gọi $G(x_G;\ y_G;\ z_G)$ là tọa độ trọng tâm tam giác ABC.

Ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

mà $\overrightarrow{GA}=(1-x_G;-1-y_G;1-z_G)$, $\overrightarrow{GB}=(0-x_G;1-y_G;2-z_G)$, $\overrightarrow{GC}=(1-x_G;0-y_G;1-z_G)$

Suy ra $\begin{cases} 1 - x_G + (-x_G) + 1 - x_G = 0 \\ -1 - y_G + 1 - y_G - y_G = 0 \\ 1 - z_G + 2 - z_G + 1 - z_G = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{2}{3} \\ y_G = 0 \\ z_G = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

Vậy $G\left(\dfrac{2}{3}; 0; \dfrac{4}{3}\right)$

Bài 3. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' biết A = (1; 0; 1), B = (2; 1; 2), D = (1; –1; 1), C' = (4; 5; –5). Tính tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp

Giải

Do ABCD.A'B'C'D' là hình hộp, nên: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{DC}$.

- Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2 - 1; 1 - 0; 2 - 1) = (1; 1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{D'C'} = (1; 1; 1)$

$\Rightarrow$ Tọa độ điểm D' = (4 – 1; 5 – 1; –5 – 1) = (3; 4; –6)

- Ta có $\overrightarrow{DC} = (1; 1; 1)$

$\Rightarrow$ Tọa độ điểm C = (1 + 1; 1 – 1; 1 + 1) = (2; 0; 2)

- Do $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{B'C'} = (1 - 1; -1 - 0; 1 - 1) = (0; -1; 0)$

Suy ra tọa độ điểm A' = (3 – 0; 4 + 1; –6 – 0) = (3; 5; –6),

tọa độ điểm B' = (4 – 0; 5 + 1; –5 – 0) = (4; 6; –5)

Bài 4. Tính

a) $\vec{a}.\vec{b}$ với $\vec{a} = (3; 0; -6)$, $\vec{b} = (2; -4; 0)$.

b) $\vec{c}.\vec{d}$ với $\vec{c} = (1; -5; 2)$, $\vec{d} = (4; 3; -5)$.

Giải

a) Ta có $\vec{a}.\vec{b} = 3.2 + 0.(-4) + (-6).0 = 6$

Vậy $\vec{a}.\vec{b} = 6$

b) Ta có $\vec{c}.\vec{d} = 1.4 + (-5).3 + 2.(-5) = 4 - 15 - 10 = -21$

Vậy $\vec{c}.\vec{d} = -21$

Bài 5. Tìm tâm và bán kính của các mặt cầu có phương trình sau đây:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0$;

b) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 8y + 15z - 3 = 0$.

Giải

a) Ta có $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0$ (1)

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 16$

$\Rightarrow$ mặt cầu (1) có tâm $I(4; 1; 0)$, bán kính $r = 4$.

b) Ta có: $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 8y + 15z - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + \frac{8}{3}y + 5z - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{17}{6}\right)^2$$

Vậy mặt cầu có tâm $I\left(1; -\frac{4}{3}; -\frac{5}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{17}{6}$.

Bài 6. Lập phương trình mặt cầu trong hai trường hợp sau:

a) Có đường kính AB với $A(4; -3; 7)$, $B(2; 1; 3)$.

b) Đi qua điểm $A(5; -2; 1)$ và có tâm $C(3; -3; 1)$.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (2-4; 1+3; 3-7) = (-2; 4; -4)$

$\Rightarrow AB = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 4^2} = 6$

Gọi I là trung điểm AB $\Rightarrow I = \left(\frac{4+2}{2}; \frac{-3+1}{2}; \frac{7+3}{2}\right) \Rightarrow I = (3; -1; 5)$

$\Rightarrow$ mặt cầu đường kính AB có tâm $I(3; -1; 4)$, bán kính $R = 3$

$\Rightarrow$ phương trình mặt cầu là: $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 9$

b) Do mặt cầu đi qua điểm $A(5; -2; 1)$ và có tâm $C(3; -3; 1)$ $\Rightarrow$ bán kính mặt cầu là:

$$R = CA = \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{(5-3)^2 + (-2+3)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{5}$$

$\Rightarrow$ mặt cầu có phương trình $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5$

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Cho $\vec{a} = (3; 1; -4)$ và $3\vec{a} - 4\vec{b} = \vec{0}$. Tọa độ vectơ $\vec{b}$ là:

(A) $(-3; -1; 4)$;

(B) $\left(\frac{9}{4}; \frac{3}{4}; -3\right)$;

(C) $\left(4; \frac{4}{3}; -\frac{16}{3}\right)$;

(D) $\left(-3; \frac{3}{4}; 4\right)$.

2. Cho $A(3; 5; -7)$. Tọa độ điểm A đối xứng với A qua trục Ox là:

(A) $(-3; 5; -7)$;

(B) $(3; -5; -7)$;

(C) $(-3; 5; 7)$;

(D) Một điểm khác (A), (B), (C).

3. Cho điểm $A(3; 2; 1)$, $B(-1; 3; 2)$, $C(2; 4; -3)$. Tích $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ bằng

(A) -13; **(B)** -14; **(C)** -15; **(D)** -16.

4. Phương trình mặt cầu đường kính AB, với $A(1; 3; 5)$, $B(-3; 3; 1)$ là:

(A) $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=8$;

(B) $(x+3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=8$;

(C) $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=8$;

(D) $(x-1)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=8$.

5. Phương trình mặt cầu đi qua $A(1; -3; 1)$, $B(1; 2; -4)$, $C(2; 2; 3)$ và có tâm I thuộc mặt phẳng (xOy) là:

(A) $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=26$;

(B) $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=26$;

(C) $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$;

(D) $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=15$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	**(B)**	**(A)**	**(D)**	**(C)**	**(B)**

§2. *Phương trình mặt phẳng*

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tích có hướng của hai vectơ

- Đặt $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$.

- Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$.

Vectơ có tọa độ $\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$ gọi là **tích có hướng của hai vectơ** $\vec{a}$ **và** $\vec{b}$**, kí hiệu** $\vec{a}\wedge\vec{b}$ $\left(\text{hoặc } \left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)$.

Vậy $\vec{a}\wedge\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$.

- Tính chất: Ta chứng minh được:

i) $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{0}$.

ii) $\vec{a} \perp \vec{a} \wedge \vec{b}$, $\vec{b} \perp \vec{a} \wedge \vec{b}$.

iii) $\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| . \left|\vec{b}\right| . \sin\varphi$ (φ là góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$).

- Điều kiện đồng phẳng của ba vectơ

+ Định lý: Điều kiện cần và đủ để ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng là $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) . \vec{c} = 0$

+ Ứng dụng

a) Diện tích tam giác: Trong không gian Oxyz cho tam giác ABC. Khi đó diện tích tam giác ABC là:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right|.$$

b) Thể tích hình hộp: Trong không gian Oxyz cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Khi đó, thể tích hình hộp là:

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right) . \overrightarrow{AA'}\right|.$$

2. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.

- Định nghĩa: Cho mặt phẳng (α). Nếu vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) thì $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của (α)).

Chú ý:

+ Nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của (α) thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$), cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

+ Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết 1 điểm đi qua và một vectơ pháp tuyến của nó.

3. Phương trình tổng quát của mặt phẳng.

- Định nghĩa: Phương trình có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$ trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0 được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

- Nhận xét:

a) Nếu mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax + By + Cz + D = 0$ thì nó có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(A; B; C)$.

b) Phương trình mặt phẳng đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nhận vectơ $\vec{n}(A; B; C)$ khác $\vec{0}$ làm vectơ pháp tuyến là: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

c) Nếu A, B, C, D đều khác 0 thì đặt $a = -\dfrac{D}{A}$, $b = -\dfrac{D}{B}$, $c = -\dfrac{D}{C}$, ta có $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ gọi là phương trình đoạn chắn.

4. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (α_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

(α_2): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Gọi $\vec{n}_{\alpha_1}, \vec{n}_{\alpha_2}$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của (α_1) và (α_2). Khi đó:

$$+)\ (\alpha_1) // (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases}$$

$$+)\ (\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases}$$

$$+)\ (\alpha_1) \text{ cắt } (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \neq k\vec{n}_2$$

$$+)\ (\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_{\alpha_1} \perp \vec{n}_{\alpha_2} \Leftrightarrow \vec{n}_{\alpha_1}.\vec{n}_{\alpha_2} = 0$$

5. Khoảng cách từ 1 điểm đến mặt phẳng.

Định lý: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Khoảng cách từ điểm M_0 đến (α), kí hiệu là $d\big(M_0, (\alpha)\big)$ được tính theo công thức:

$$d\big(M_0, (\alpha)\big) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Các bài tập sau đây đều xét trong không gian Oxyz.

Bài 1. Viết phương trình của mặt phẳng:

a) Đi qua điểm M(1; −2; 4) và nhận $\vec{n} = (2;3;5)$ làm vectơ pháp tuyến;

b) Đi qua điểm A(0; −1; 2) và song song với giá của hai vectơ $\vec{u} = (3;2;1)$ và $\vec{v} = (-3;0;1)$;

c) Đi qua ba điểm A(−3; 0; 0), B(0; −2; 0) và C(0; 0; −1).

Giải

a) Mặt phẳng (α) đi qua điểm M(1; −2; 4) và nhận $\vec{n} = (2;3;5)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình:

$2(x-1)+3(y+2)+5(z-4)=0$ hay $2x+3y+5z-16=0$

b) Do mặt phẳng (β) cần tìm đi qua A(0; –1; 2) và song song với giá của hai vectơ $\vec{u}=(3;2;1)$ và $\vec{v}=(-3;0;1)$ nên (β) có một vectơ pháp tuyến:

$$\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}2&1\\0&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&3\\1&-3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3&2\\-3&0\end{vmatrix}\right)=(2;-6;6)$$

$\Rightarrow$ (β) có phương trình:

$2(x-0)-6(y+1)+6(z-2)=0$ hay $x-3y+3z-9=0$

c) Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-2;0)$, $\overrightarrow{AC}=(3;0;-1)$

Do (γ) đi qua 3 điểm A, B, C nên (γ) có một vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}-2&0\\0&-1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0&3\\-1&3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3&-2\\3&0\end{vmatrix}\right)=(2;3;6)$$

$\Rightarrow$ (γ) có phương trình $2(x+3)+3(y-0)+6(z-0)=0$

hay $2x+3y+6z+6=0$

Bài 2. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với A(2; 3; 7), B(4; 1; 3).

Giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4-2;1-3;3-7)=(2;-2;-4)=2(1;-1;-2)$

Gọi I là trung điểm AB $\Rightarrow$ I = (3; 2; 5)

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của AB $\Rightarrow$ (α) nhận $\vec{n}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(1;-1;-2)$ làm một vectơ pháp tuyến và (α) đi qua I; nên (α) có phương trình:

$1(x-3)-1(y-2)-2(z-5)=0$ hay $x-y-2z+9=0$

Bài 3.

a) Lập phương trình của các mặt phẳng tọa độ (Oxy), (Oyz), (Oxz).

b) Lập phương trình của các mặt phẳng đi qua điểm M(2; 6; –3) và lần lượt song song với các mặt phẳng tọa độ.

$6\begin{cases}1 & 0 & 0\\ & 1 & 0\\ 0 & & \end{cases}$

Giải

a) • Mặt phẳng (Oxy).

Mặt phẳng (Oxy) đi qua O(0; 0; 0) và nhận vectơ $\vec{n}=\vec{i}\wedge\vec{j}$ làm một vectơ pháp tuyến ($\vec{i}$, $\vec{j}$ lần lượt là 2 vectơ đơn vị trên hai trục Ox, Oy)

mà $\vec{n}=\left(\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\right)=(0;0;1)$

Do đó mặt phẳng (Oxy) có phương trình: $0(x-0)+0(y-0)+1(z-0)=0$ hay $z=0$

- Hoàn toàn tương tự ta có mặt phẳng (Oyz) có phương trình $x = 0$, mặt phẳng (Ozx) có phương trình $y = 0$.

b) • Phương trình mặt phẳng (α_1) đi qua điểm $M(2; 6; -3)$ và song song với mặt phẳng (Oxy) nên nhận $\vec{n_1} = \vec{k} = (0; 0; 1)$ làm vectơ pháp. Do vậy (α_1) có phương trình

$0(x - 2) + 0(y - 6) + 1(z + 3) = 0$ hay $z + 3 = 0$

- Hoàn toàn tương tự, ta có phương trình mặt phẳng (α_2), (α_3) đi qua điểm M và lần lượt song song với mặt phẳng (Oyz), (Oxz) có phương trình là: $x - 2 = 0$; $y - 6 = 0$.

Lưu ý: Ở câu a, ta cũng chỉ cần làm như sau là đủ:

Ta có $Oz \perp (Oxy) \Rightarrow$ mặt phẳng (Oxy) nhận vectơ $\vec{k} = (0; 0; 1)$ làm một vectơ pháp tuyến, mà (Oxy) đi qua $O(0; 0; 0)$, nên mặt phẳng (Oxy) có phương trình: $z = 0$.

Bài 4. Lập phương trình của mặt phẳng:

a) Chứa trục Ox và điểm $P(4; -1; 2)$;

b) Chứa trục Oy và điểm $Q(1; 4; -3)$;

c) Chứa trục Oz và điểm $R(3; -4; 7)$.

Giải

a) Mặt phẳng (α_1) chứa trục Ox và điểm $P(4; -1; 2)$, nên mặt phẳng (α_1) nhận $\vec{n_1} = \vec{i} \wedge \overrightarrow{OP}$ với $\vec{i} = (1; 0; 0)$ là vectơ đơn vị trên trục Ox, $\overrightarrow{OP} = (4 -1; 2)$ làm một vectơ pháp tuyến.

Ta có $\vec{n_1} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \right) = (0; -2; -1)$

$\Rightarrow (c_1)$ có phương trình: $0(x - 4) - 2(y + 1) - 1(z - 2) = 0$ hay $2y + z = 0$

b) Mặt phẳng (α_2) chứa Oy và điểm $Q(1; 4; -3)$, nên (α_2) nhận vectơ

$\vec{n_2} = \vec{j} \wedge \overrightarrow{OQ} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \right) = (-3; 0; -1)$ làm một vectơ pháp tuyến

$\Rightarrow (c_2)$ có phương trình: $-3(x - 1) + 0(y - 4) - 1(z + 3) = 0$ hay $3x + z = 0$

c) Mặt phẳng (α_3) chứa Oz và điểm $R(3; -4; 7)$ nên (α_3) nhận vectơ

$\vec{n_3} = \vec{k} \wedge \overrightarrow{OR} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \right) = (4; 3; 0)$ làm một vectơ pháp tuyến

$\Rightarrow (c_3)$ có phương trình: $4(x - 3) + 3(y + 4) + 0(z - 7) = 0$ hay $4x + 3y = 0$

Bài 5. Cho tứ diện có các đỉnh là $A(5; 1; 3)$, $B(1; 6; 2)$, $C(5; 0; 4)$, $D(4; 0; 6)$.

a) Hãy viết phương trình của các mặt phẳng (ACD) và (BCD).

b) Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua cạnh AB và song song với cạnh CD.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AC} = (0; -1; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (-1; -1; 3)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-2; -1; -1) = -(2; 1; 1)$$

⇒ mặt phẳng (ACD) nhận $\overrightarrow{n_1} = (2; 1; 1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy mặt phẳng (ACD) có phương trình: $2(x - 5) + 1(y - 1) + 1(z - 3) = 0$ hay $2x + y + z - 14 = 0$

- Ta có $\overrightarrow{BC} = (4; -6; 2)$, $\overrightarrow{BD} = (3; -6; 4)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \left(\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} \right) = (-12; -10; -6) = -2(6; 5; 3)$$

⇒ mặt phẳng (BCD) nhận vectơ $\overrightarrow{n_2} = (6; 5; 3)$ làm một vectơ pháp tuyến

⇒ mặt phẳng (BCD) có phương trình:

$6(x - 1) + 5(y - 6) + 3(z - 2) = 0$ hay $6x + 5y + 3z - 42 = 0$

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4; 5; -1)$, $\overrightarrow{CD} = (-1; 0; 2)$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = \left(\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (10; 9; 5)$$

Do mặt phẳng (α) chứa AB và song song với CD nên mặt phẳng (α) đi qua điểm A(5; 1; 3) và nhận vectơ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}$ làm một vectơ pháp tuyến⇒ (α) có phương trình:

$10(x - 5) + 9(y - 1) + 5(z - 3) = 0$ hay $10x + 9y + 5z - 74 = 0$

Bài 6. Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M(2; −1; 2) và song song với mặt phẳng (β): $2x - y + 3z + 4 = 0$.

Giải

Do mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β): $2x - y + 3z + 4 = 0$, nên mặt phẳng (α) nhận vectơ $\vec{n} = (2; -1; 3)$ làm một vectơ pháp tuyến mà (α) đi qua điểm M(2; −1; 2), nên mặt phẳng (α) có phương trình:

$2(x - 2) - 1(y + 1) + 3(z - 2) = 0$ hay $2x - y + 3z - 11 = 0$

Bài 7. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A(1; 0; 1), B(5; 2; 3) và vuông góc với mặt phẳng (β): $2x - y + z - 7 = 0$

Giải

(β) có một vectơ pháp tuyến: $\overrightarrow{n_1} = (2; -1; 1)$, $\overrightarrow{AB} = (4; 2; 2)$

Do mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (β), nên mặt phẳng (α) nhận vectơ $\vec{n} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{AB}$ làm một vectơ pháp tuyến, mà

$$\vec{n} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{AB} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-4; 0; 8)$$

$\Rightarrow (\alpha)$ có phương trình:

$-4(x - 1) + 0(y - 0) + 8(z - 1) = 0$ hay $x - 2z + 1 = 0$

Bài 8. Xác định các giá trị của m và n để mỗi cặp mặt phẳng sau đây là một cặp mặt phẳng song song với nhau:

a) $2x + my + 3z - 5 = 0$ và $nx - 8y - 6z + 2 = 0$;

b) $3x - 5y + mz - 3 = 0$ và $2x + ny - 3z + 1 = 0$.

Giải

a) Ta có

mặt phẳng (α_1): $2x + my + 3z - 5 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = (2; m; 3)$

mặt phẳng (α_2): $nx - 8y - 6z + 2 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2} = (n; -8; -6)$.

Để $(\alpha_1) // (\alpha_2)$ thì $\dfrac{2}{n} = \dfrac{m}{-8} = \dfrac{3}{-6} \neq \dfrac{-5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{n} = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{m}{-8} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -4 \\ m = 4 \end{cases}$

Vậy với $m = 4$, $n = -4$ thì hai mặt phẳng $2x + my + 3z - 5 = 0$ và $nx - 8y - 6z + 2 = 0$ song song với nhau.

b) Để hai mặt phẳng (β_1): $3x - 5y + mz - 3 = 0$ và (β_2): $2x + ny - 3z + 1 = 0$ song song với nhau thì

$$\frac{3}{2} = \frac{-5}{n} = \frac{m}{-3} \neq \frac{-3}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-5}{n} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{m}{-3} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \dfrac{-10}{3} \\ m = \dfrac{-9}{2} \end{cases}$$

Vậy với $m = -\dfrac{9}{2}$, $n = -\dfrac{10}{3}$ thì hai mặt phẳng (β_1) và (β_2) song song với nhau.

Bài 9 Tính khoảng cách từ điểm A(2; 4; −3) lần lượt đến các mặt phẳng sau:

a) $2x - y + 2z - 9 = 0$;

b) $12x - 5z + 5 = 0$;

c) $x = 0$.

Giải

a) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α): $2x - y + 2z - 9 = 0$ là

$$d\left(A,(\alpha)\right) = \frac{|2.2 - 4 + 2.(-3) - 9|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{15}{3} = 5 \text{ (đvđd)}$$

b) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (β): $12x - 5z + 5 = 0$ là

$$d\left(A,(\beta)\right) = \frac{|12.2 - 5.(-3) + 5|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{44}{13} \text{ (đvđd)}$$

c) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (γ). $x = 0$ là

$$d\left(A,(\gamma)\right) = \frac{|2|}{\sqrt{1}} = 2 \text{ (đvđd)}$$

Bài 10. Giải bài toán sau đây bằng phương pháp tọa độ:

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng 1.

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (AB'D') và (BC'D) song song với nhau.

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng nói trên.

Giải

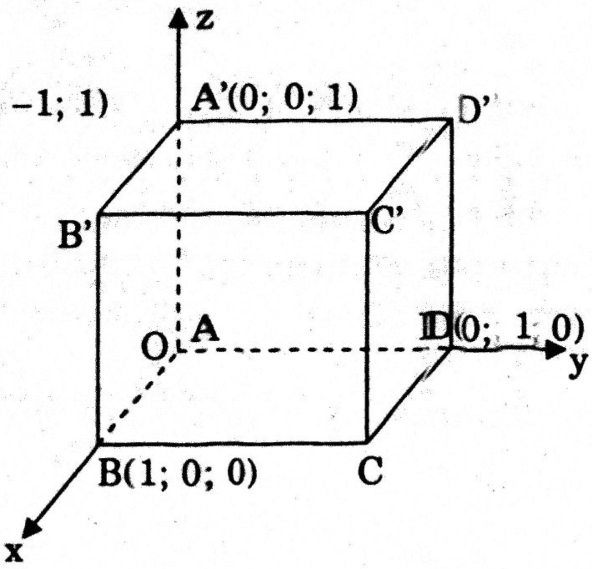
Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ: A ≡ O(0; 0; 0), D(0; 1; 0), B(1; 0; 0), A'(0; 0; 1)

Khi đó B' = (1; 0; 1), D' = (0; 1; 1), C' = (1; 1; 1)

a) • Phương trình mặt phẳng (AB'D')

Ta có $\overrightarrow{AB'} = (1;0;1)$, $\overrightarrow{AD'} = (0;1;1)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB'} \wedge \overrightarrow{AD'} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = (-1; -1; 1)$$



⇒ mặt phẳng (AB'D') nhận vectơ $\overrightarrow{n_1} = (-1;-1;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy (AB'D') có phương trình

$$-1(x - 0) - 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0$$

hay $x + y - z = 0$

• Phương trình mặt phẳng (BC'D)

Ta có $\overrightarrow{BC'} = (0;1;1)$, $\overrightarrow{BD} = (-1;1;0)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC'} \wedge \overrightarrow{BD} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right) = (-1; -1; 1)$$

⇒ mặt phẳng (BC'D) nhận $\overrightarrow{n_2} = (-1;-1;1)$ làm một vectơ pháp tuyến.

$\Rightarrow$ (BC'D) có phương trình

$-1(x-1) - 1(y-0) + 1(z-0) = 0$ hay $x + y - z - 1 = 0$

- Do $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{-1} \Rightarrow (AB'D') \,//\, (BC'D)$

b) Khoảng cách h giữa hai mặt phẳng song song (AB'D') và (BC'D) là khoảng cách từ điểm B đến (AB'D')

$$\Rightarrow h = d\big(B,(AB'D')\big) = \frac{|1.1 + 1.0 - 1.0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Tọa độ vectơ $\vec{n}$ vuông góc với hai vectơ $\vec{a} = (1;3;-2)$ và $\vec{b} = (-3;1;2)$ là:

(A) (4; 2; 5); **(B)** (8; 2; 10); **(C)** (−4; 2; 5); **(D)** (-4; −2; 5).

2. Phương trình mặt phẳng đi qua A(1; 4; −3) và song song với mặt phẳng: $2x - 4y + 3z - 2 = 0$ là:

(A) $2x - 4y + 3z - 23 = 0$; **(B)** $2x + 4y + 3z - 10 = 0$;

(C) $2x - 4y + 3z + 23 = 0$; **(D)** $2x - 4y + 3z - 10 = 0$.

3. Cho điểm A(1; 4; −3). Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của A lên các trục Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng $(A_1A_2A_3)$ là:

(A) $\frac{x}{1} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 0$; **(B)** $\frac{x}{1} + \frac{y}{4} - \frac{z}{3} = 1$;

(C) $\frac{x}{4} + \frac{y}{1} - \frac{z}{3} = 1$; **(D)** $\frac{x}{1} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$.

4. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A(1; 0; 1), B(2; 1; 2) và vuông góc với mặt phẳng (β): $x + 2y + 3z - 2008 = 0$ là:

(A) $x - 2y + z = 0$; **(B)** $x + 2y + 3z - 4 = 0$;

(C) $x - 2y + z + 2 = 0$; **(D)** $x - 2y + z - 2 = 0$.

5. Cho hai mặt phẳng (α): $x - y + 10 = 0$ và (β): $2x - y - 2z + 10 = 0$. Góc tạo bởi hai mặt phẳng (α) và (β) là:

(A) 30^0; **(B)** 45^0; **(C)** 60^0; **(D)** 90^0.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	**(A)**	**(C)**	**(B)**	**(D)**	**(B)**

§3. Phương trình đường thẳng trong không gian

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình tham số của đường thẳng

- Vectơ $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng (d)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \neq \vec{0} \\ \text{giá của } \vec{u} \text{ song song hoặc trùng với d} \end{cases}$$

- Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ là phương trình có dạng

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases} \quad \text{(t là tham số)}$$

Chú ý: Nếu a_1, a_2, a_3 đều khác 0 thì Δ còn được viết dưới dạng chính tắc sau:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

2. Điều kiện để hai đường thẳng song song, cắt nhau, chéo nhau

Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng Δ và Δ' lần lượt có phương trình:

$$\Delta: \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases} ; \qquad \Delta': \begin{cases} x = x'_0 + a'_1t' \\ y = y'_0 + a'_2t' \\ z = z'_0 + a'_3t' \end{cases} \quad \text{(với t, t' là tham số)}$$

Ta có Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$

Δ' đi qua điểm $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{a'}(a'_1; a'_2; a'_3)$

Trường hợp 1. Δ // Δ' $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = k\vec{a'} \\ M_0 \notin \Delta' \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \vec{a} = k\vec{a'} \\ M'_0 \notin \Delta \end{cases}$

Trường hợp 2. Δ và Δ' cắt nhau khi và chỉ khi hệ phương trình ẩn t, t' sau

$$\begin{cases} x_0 + a_1t = x'_0 + a'_1t' \\ y_0 + a_2t = y'_0 + a'_2t' \\ z_0 + a_3t = z'_0 + a'_3t' \end{cases} \quad \text{có đúng một nghiệm}$$

Trường hợp 3. Δ và Δ' chéo nhau khi và chỉ khi $\vec{a}$ và $\vec{a'}$ không cùng phương và hệ phương trình ẩn t, t':

$$\begin{cases} x_0 + a_1t = x'_0 + a'_1t' \\ y_0 + a_2t = y'_0 + a'_2t' \\ z_0 + a_3t = z'_0 + a'_3t' \end{cases} \quad \text{vô nghiệm}$$

3. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng:

Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ và đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$

Xét phương trình $A(x_0 + a_1t) + B(y_0 + a_2t) + C(z_0 + a_3t) + D = 0$ (*)

- Nếu phương trình (*) vô nghiệm thì Δ // (α)
- Nếu phương trình (*) có một nghiệm $t = t_0$ thì Δ cắt (α) tại một điểm $M(x_0 + a_1t_0; y_0 + a_2t_0; z_0 + a_3t_0)$.
- Nếu phương trình (*) có vô số nghiệm thì $\Delta \subset (\alpha)$.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Viết phương trình tham số của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

a) d đi qua điểm M(5; 4; 1) và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; -3; 1)$;

b) d đi qua điểm A(2; −1; 3) và vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $x + y - z + 5 = 0$;

c) d đi qua điểm B(2; 0; −3) và song song với đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 4t \end{cases}$

d) d đi qua hai điểm P(1; 2; 3) và Q(5; 4; 4).

Giải

a) d đi qua điểm M(5; 4; 1) và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; -3; 1)$ nên d có phương trình: $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

b) Do d vuông góc với mặt phẳng (α): $x + y - z + 5 = 0$, nên d nhận vectơ $\vec{a} = (1; 1; -1)$ làm vectơ chỉ phương.

Do vậy d có phương trình $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$

c) Do d song song với đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 4t \end{cases}$ nên d nhận vectơ $\vec{a} = (2;3;4)$ làm vectơ chỉ phương, mà d đi qua B(2; 0; –3)

Do đó d có phương trình: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$

d) Do d đi qua P(1; 2; 3) và Q(5; 4; 4) nên d nhận vectơ $\overrightarrow{PQ} = (4;2;1)$ làm vectơ chỉ phương. Do đó d có phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Bài 2. Viết phương trình tham số của đường thẳng là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d:

$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ lần lượt trên các mặt phẳng sau:

a) (Oxy); **b)** (Oyz).

Giải

Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (Oxy)

$\Rightarrow$ (P) nhận vectơ $\vec{n} = \vec{k} \wedge \vec{a}$

($\vec{k} = (0;0;1)$, $\vec{a} = (1;2;3)$) làm vectơ pháp tuyến.

mà $\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-2;\ 1;\ 0)$

mà (P) đi qua A(2; –3; 1), nên (P) có phương trình

$-2(x - 2) + 1(y + 3) + 0(z - 1) = 0$ hay $2x - y - 7 = 0$

$\Rightarrow$ hình chiếu của đường thẳng d lên (Oxy) có phương trình $\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

hay d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-1;\ -2;\ 0)$

mà d đi qua B(2; −3; 0)

$\Rightarrow$ d có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 - 2t \\ z = 0 \end{cases}$

b) Hoàn toàn tương tự ta có phương trình tham số của d trên mặt phẳng (Oyz) là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

Bài 3. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng d và d' cho bởi các phương trình sau

a) d: $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -1 - 4t'; \\ z = 20 + t' \end{cases}$

b) d: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$

Giải

a) Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} -3 + 2t = 5 + t' \\ -2 + 3t = -1 - 4t' \\ 6 + 4t = 20 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - t' = 8 \\ 3t + 4t' = 1 \\ 4t - t' = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t' = -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hệ có nghiệm $\begin{cases} t_0 = 3 \\ t'_0 = -2 \end{cases}$

nên d cắt d' tại điểm $M_0(3; 7; 18)$

b) Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1 + t = 1 + 2t' \\ 2 + t = -1 + 2t' \\ 3 - t = 2 - 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 2t' = 0 \\ t - 2t' = -3 \\ t - 2t' = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{hệ vô nghiệm}$$

Lại có d nhận $\vec{a} = (1; 1; -1)$ làm vectơ chỉ phương.

d' nhận $\vec{a'} = (2; 2; -2)$ làm vectơ chỉ phương.

mà $\vec{a'} = 2\vec{a}$ $\Rightarrow$ d và d' là hai đường thẳng song song.

Bài 4. Tìm a để hai đường thẳng sau đây cắt nhau

$$d: \begin{cases} x = 1 + at \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$$

Giải

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1 + at = 1 - t' \\ t = 2 + 2t' \\ -1 + 2t = 3 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' + at = 0 \\ t = 2 + 2t' \\ -1 + 2(2 + 2t') = 3 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' + at = 0 \\ t' = 0 \\ t = \dfrac{6}{5} \end{cases} \quad (*)$$

Để d và d' cắt nhau thì (*) có nghiệm duy nhất t và t' $\Rightarrow 0 + \dfrac{6}{5}a = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Vậy a = 0 là giá trị cần tìm.

Bài 5. Tìm số giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau:

a) $d: \begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và $(\alpha): 3x + 5y - z - 2 = 0;$

b) $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và $(\alpha): x + 3y + z + 1 = 0;$

c) $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ và $(\alpha): x + y + z - 4 = 0$.

Giải

a) Xét phương trình: $3(12 + 4t) + 5(9 + 3t) - (1 + t) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 26t + 78 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -3$ là nghiệm duy nhất

Suy ra đường thẳng d cắt mặt phẳng (α) tại điểm A(0; 0; −2)

b) Xét phương trình: $(1 + t) + 3(2 - t) + (1 + 2t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 9 = 0$ vô lý

Suy ra d // (α). Vậy d và (α) không có điểm chung.

c) Xét phương trình: $(1 + t) + (1 + 2t) + (2 - 3t) - 4 = 0 \Leftrightarrow 4 - 4 = 0$ đúng $\forall t$

$\Rightarrow$ d nằm trong mặt phẳng (α).Vậy d và (α) có vô số điểm chung.

Bài 6. Tính khoảng cách giữa đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng (α): $2x - 2y + z + 3 = 0$

Giải

Xét phương trình: $2(-3 + 2t) - 2(-1 + 3t) + (-1 + 2t) + 3 = 0 \Leftrightarrow 2 = 0$ vô lý $\Rightarrow \Delta \mathbin{/\mkern-5mu/} (\alpha)$

Lại có Δ đi qua điểm A(−3; −1; −1)

$$\Rightarrow d\big(\Delta, (\alpha)\big) = d\big(A, (\alpha)\big) = \frac{|2.(-3) - 2(-1) - 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}$$

Vậy khoảng cách giữa Δ và (α) là $\frac{2}{3}$ (đvđd)

Bài 7. Cho điểm A(1; 0; 0) và đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$

a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng Δ.

b) Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua đường thẳng Δ.

Giải

a) Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với Δ, suy ra mặt phẳng (α) nhận $\vec{n} = (1; 2; 1)$ làm vectơ pháp tuyến

$\Rightarrow (\alpha)$ có phương trình $1(x - 1) + 2y + z = 0$ hay $x + 2y + z - 1 = 0$

Suy ra tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng Δ là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \\ x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \\ (2 + t) + 2(1 + 2t) + t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{3}{2} \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $H\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right)$

b) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua Δ. Theo câu a, suy ra H là trung điểm của AA', suy ra tọa độ của A' là:

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A \\ y_{A'} = 2y_H - y_A \\ z_{A'} = 2z_H - z_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2 \\ y_{A'} = 0 \\ z_{A'} = -1 \end{cases}$$. Vậy A'(2; 0; –1)

Bài 8. Cho điểm M(1; 4; 2) và mặt phẳng (α): $x + y + z - 1 = 0$.

a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α).

b) Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (α).

c) Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α).

Giải

a) Gọi Δ là đường thẳng đi qua M và vuông góc với (α), suy ra Δ nhận vectơ $\vec{a} = (1;1;1)$ làm vectơ chỉ phương.

$\Rightarrow$ Δ có phương trình: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Suy ra tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên (α), là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 + t \\ z = 2 + t \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 + t \\ z = 2 + t \\ (1 + t) + (4 + t) + (2 + t) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ x = -1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Vậy H = (–1; 2; 0)

b) Gọi M' = (x; y; z) là điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (α)

$\Rightarrow$ M và M' đối xứng nhau qua điểm H hay H là trung điểm của MM'.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2x_H - x_M \\ y = 2y_H - y_M \\ z = 2z_H - z_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases}$$. Vậy M' = (–3; 0; –2)

c) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) là:

$$d\big(M,(\alpha)\big) = \frac{|1 + 4 + 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ (đvđd)}$$

Chú ý: Ta có thể tính: $d\big(M,(\alpha)\big) = MH = \left|\overrightarrow{MH}\right| = 2\sqrt{3}$

Bài 9. Cho hai đường thẳng:

$$d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \end{cases} \text{ và } \quad d': \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

Chứng minh d và d' chéo nhau.

Giải

Cách 1. Ta có d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a} = (-1;2;3)$ và đi qua điểm M(1; 2; 0)

d' có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a'} = (1;-2;0)$ và đi qua điểm M'(1; 3; 1)

$\Rightarrow \overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{a'}$ không cùng phương(1)

Lại có, xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1 - t = 1 + t' \\ 2 + 2t = 3 - 2t' \\ 3t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{3} \\ t = -t' \\ 2t = -2t' + 1 \end{cases} \quad \text{Vô lý} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ d và d' chéo nhau.

Cách 2. Ta có $\overrightarrow{MM'} = (0;1;1)$

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{a'} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (6;\ 3;\ 0)$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{a'} \right).\overrightarrow{MM'} = 6.0 + 1.3 + 0.1 = 3 \neq 0$$

Suy ra $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a'}, \overrightarrow{MM'}$ không đồng phẳng hay d và d' chéo nhau.

Bài 10. Giải bài toán sau đây bằng phương pháp tọa độ:

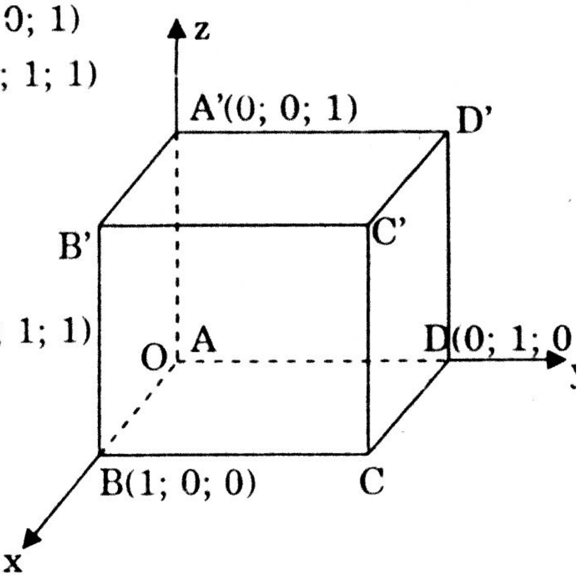
Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến các mặt phẳng (A'BD) và (B'D'C).

Giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ:

A ≡ O(0; 0; 0), B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), A'(0; 0; 1)

Suy ra C = (1; 1; 0), B' = (1; 0; 1), D' = (0; 1; 1)



a) • Ta có $\overrightarrow{A'B} = (1;0;-1)$

$\overrightarrow{A'D} = (0;1;-1)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A'B} \wedge \overrightarrow{A'D} = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1;\ 1;\ 1)$$

$\Rightarrow$ mặt phẳng (A'BD) có phương trình

$1(x - 0) + 1(y - 0) + 1(z - 1) = 0$

hay $x + y + z - 1 = 0$

$\Rightarrow$ khoảng cách từ đỉnh A đến (A'BD) là

$$d\left(A,(A'BD)\right) = \frac{|0+0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (đvđd)}$$

- Ta có $\overrightarrow{B'D'} = (-1;1;0)$

$\overrightarrow{B'C} = (0;1;-1)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{B'D'} \wedge \overrightarrow{B'C} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1;-1;-1)$$

$\Rightarrow$ (B'D'C) có phương trình:

$-1(x-1) - 1(y-0) - 1(z-1) = 0$ hay $x + y + z - 2 = 0$

$\Rightarrow$ khoảng cách từ đỉnh A đến (B'D'C) là:

$$d\left(A,(B'D'C)\right) = \frac{|0+0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ (đvđd)}$$

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Phương trình đường thẳng đi qua điểm A(3; 5; −4) và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a} = (3;1;2)$ là:

(A) $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-2}{-4}$; **(B)** $\frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-4}{2}$;

(C) $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 + 5t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$; **(D)** $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 5 + t \\ z = -4 + 2t \end{cases}$

2. Cho đường thẳng Δ có phương trình: $\begin{cases} x + y - 3z + 10 = 0 \\ 2x + y - 2z + 7 = 0 \end{cases}$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là:

(A) $\overrightarrow{u} = (1;1;-3)$; **(B)** $\overrightarrow{u} = (1;-4;-1)$;

(C) $\overrightarrow{u} = (2;1;-2)$; **(D)** $\overrightarrow{u} = (-1;1;-4)$.

3. Cho đường thẳng Δ có phương trình: $\begin{cases} 2x + y - 2z + 7 = 0 \\ -x - y + 3z - 10 = 0 \end{cases}$. Phương trình tham số của Δ là:

(A) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -7 - 4t \\ z = -t \end{cases}$; **(B)** $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -4 - 7t \\ z = -1 \end{cases}$;

(C) $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -7 + t\,; \\ z = -4t \end{cases}$ **(D)** $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -4 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$

4. Điểm đối xứng với điểm A(5; 0; 3) qua mặt phẳng (α) có phương trình: $2x - y + 3z - 5 = 0$, có tọa độ:

(A) (2; –3; 1); **(B)** (–3; 1; 2);

(C) (1; 2; –3); **(D)** Một điểm khác **(A)**, **(B)**, **(C)**.

5. Hình chiếu vuông góc của đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$ lên mặt phẳng (α): $3x - y + z - 7 = 0$ có phương trình là:

(A) $\begin{cases} 3x - y + z - 7 = 0 \\ 2x + 7y + z - 13 = 0 \end{cases}$; **(B)** $\begin{cases} 3x - y + z - 7 = 0 \\ 2x + 7y + z + 13 = 0 \end{cases}$;

(C) $\begin{cases} 3x - y + z - 7 = 0 \\ x + 2y + 7z + 16 = 0 \end{cases}$; **(D)** $\begin{cases} 3x - y + z - 7 = 0 \\ x + 2y + 7z - 16 = 0 \end{cases}$.

IV. ĐÁP SỐ

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	**(D)**	**(B)**	**(A)**	**(C)**	**(A)**

ÔN TẬP CHƯƠNG III

Các bài toán sau đây đều cho trong hệ tọa độ Oxyz.

Bài 1. Cho bốn điểm A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1), D(–2; 1; –1)

a) Chứng minh A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.

b) Tìm góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

c) Tính độ dài đường cao của hình chóp ABCD.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (-3; 1; -1)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (1; 1; 1)$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right) . \overrightarrow{AD} = 1.(-3) + 1.1 + 1.(-1) = -3 \neq 0$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng hay A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.

b) Ta có $\overrightarrow{CD} = (-2; 1; -2)$

$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|} = \frac{-1.(-2) + 1.1 + 0.(-2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}.\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}.3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ góc giữa hai đường thẳng AB và CD là 45^0.

c) Ta có $\overrightarrow{BC} = (0; -1; 1)$, $\overrightarrow{BD} = (-2; 0; -1)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (1; -2; -2)$$

$\Rightarrow$ mặt phẳng (BCD) có phương trình:

$1(x - 0) - 2(y - 1) - 2(z - 0) = 0$ hay $x - 2y - 2z + 2 = 0$

Suy ra độ dài đường cao của hình chóp ABCD là

$$h = d\left(A, (BCD)\right) = \frac{|1 - 2.0 - 2.0 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 1 \text{ (đvđd)}$$

Bài 2. Cho mặt cầu (S) có đường kính AB biết rằng A(6; 2; −5), B(−4; 0; 7).

a) Tìm tọa độ tâm I và bán kính r của mặt cầu (S).

b) Lập phương trình của mặt cầu (S).

c) Lập phương trình của mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A.

Giải

a) Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) đường kính AB là trung điểm của AB

$$\Rightarrow \text{Tọa độ điểm I là: } \begin{cases} x = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Vậy I = (1; 1; 1)

$$\text{Ta có } r = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-4 - 6)^2 + (0 - 2)^2 + (7 + 5)^2} = \sqrt{62}$$

b) Phương trình mặt cầu (S) là mặt cầu tâm I(1; 1; 1), bán kính $r = \sqrt{62}$, nên (S) có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 62$

c) Ta có $\overrightarrow{AI} = (1 - 6; 1 - 2; 1 + 5) = (-5; -1; 6)$

⇒ mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A là mặt phẳng qua A và nhận $\overrightarrow{AI}$ làm vectơ pháp tuyến.

Suy ra (α) có phương trình:

$-5(x - 6) - 1(y - 2) + 6(z + 5) = 0$ hay $5x + y - 6z - 62 = 0$

Bài 3. Cho bốn điểm A(−2; 6; 3), B(1; 0; 6), C(0; 2; −1), D(1; 4; 0).

a) Viết phương trình mặt phẳng (BCD). Suy ra ABCD là một tứ diện.

b) Tính chiều cao AH của tứ diện ABCD.

c) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa AB và song song với CD.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{CD} = (1; 2; 1)$, $\overrightarrow{CB} = (1; -2; 7)$

Suy ra $\overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CB} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (16; -6; -4)$

⇒ mặt phẳng (BCD) nhận $\vec{n} = \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CB} = (16; -6; -4)$ làm vectơ pháp tuyến

⇒ (BCD) có phương trình $16(x - 1) - 6(y - 0) - 4(z - 6) = 0$ hay $8x - 3y - 2z + 4 = 0$

Do $8.(-2) - 3.6 - 2.3 + 4 = -36 \neq 0 \Rightarrow A \notin (BCD)$

⇒ bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng hay ABCD là tứ diện

b) Chiều cao AH của tứ diện ABCD là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD), do vậy: $AH = d\big(A, (BCD)\big) = \dfrac{|8.(-2) - 3.6 - 2.3 + 4|}{\sqrt{8^2 + 3^2 + 2^2}} = \dfrac{36}{\sqrt{77}}$

c) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -6; 3)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = \left(\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-12; 0; 12) = 12(-1; 0; 1)$

Do (α) là mặt phẳng chứa AB và song song với CD nên (α) đi qua A(−2; 6; 3) và nhận $\vec{n} = (-1; 0; 1)$ làm vectơ pháp tuyến. Do vậy mặt phẳng (α) có phương trình:

$-1(x + 2) + 0(y - 6) + 1(z - 3) = 0$ hay $-x + z - 5 = 0$

Bài 4. Lập phương trình tham số của đường thẳng:

a) Đi qua hai điểm A(1; 0; −3), B(3; −1; 0).

b) Đi qua điểm M(2; 3; −5) và song song với đường thẳng Δ có phương trình: $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = -5t \end{cases}$

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 3)$

Đường thẳng đi qua 2 điểm A, B nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vectơ chỉ phương

$\Rightarrow$ Đường thẳng AB có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$

b) Do đường thẳng d song song với Δ: $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = -5t \end{cases}$ nên d nhận $\overrightarrow{a} = (2; -4; -5)$ làm vectơ chỉ phương, mà d đi qua M(2; 3; –5)

$\Rightarrow$ d có phương trình $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = -5 - 5t \end{cases}$

Bài 5. Cho mặt cầu (S) có phương trình: $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 100$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x - 2y - z + 9 = 0$. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C). Hãy xác định tọa độ tâm và bán kính của đường tròn (C).

Giải

Ta có (S) là mặt cầu có tâm I(3; –2; 1), bán kính R = 10. Gọi H là hình chiếu của I lên (α) và r là bán kính đường tròn (C) tạo bởi (α) với (S).

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (α)

$\Rightarrow$ Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a} = (2; -2; -1)$

$\Rightarrow$ Δ có phương trình $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tọa độ H là tâm đường tròn (C) là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \\ 2x - 2y - z + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \\ 2(3 + 2t) - 2(-2 - 2t) - (1 - t) + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \\ 9t = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow H = (-1; 2; 3)$$

$$IH = \left|\overrightarrow{IH}\right| = \sqrt{(-1-3)^2 + (2+2)^2 + (3-1)^2} = 6$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$$

Vậy (C) là đường tròn tâm $H = (-1; 2; 3)$, bán kính $r = 8$.

Bài 6. Cho mặt phẳng (α) có phương trình $3x + 5y - z - 2 = 0$ và đường thẳng d có phương trình: $\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

a) Tìm giao điểm M của đường thẳng d và mặt phẳng (α).

b) Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa điểm M và vuông góc với đường thẳng d.

Giải

a) Tọa độ giao điểm M của đường thẳng d và mặt phẳng (α) là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \\ 3x + 5y - z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \\ 3(12 + 4t) + 5(9 + 3t) - (1 + t) - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases}$$

Vậy $M = (0; 0; -2)$

b) Do mặt phẳng (β) chứa $M(0; 0; -2)$ và vuông góc với đường thẳng d

$\Rightarrow (\beta)$ nhận vectơ $\vec{a} = (4; 3; 1)$ làm vectơ pháp tuyến

$\Rightarrow (\beta)$ có phương trình :

$4(x - 0) + 3(y - 0) + 1(z + 2) = 0$ hay $4x + 3y + z + 2 = 0$

Bài 7. Cho điểm $A(-1; 2; -3)$, vectơ $\vec{a} = (6; -2; -3)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 2t. \\ z = 3 - 5t \end{cases}$

a) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa điểm A và vuông góc với $\vec{a}$.

b) Tìm giao điểm của d và (α).

c) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc với $\vec{a}$ và cắt đường thẳng d.

Giải

a) Mặt phẳng (α) chứa $A(-1; 2; -3)$ và vuông góc với vectơ $\vec{a} = (6; -2; -3)$

$\Rightarrow$ (α) có phương trình: $6(x + 1) - 2(y - 2) - 3(z + 3) = 0$

$\Leftrightarrow$ $6x - 2y - 3z + 1 = 0$

b) Tọa độ giao điểm M của d và (α) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 5t \\ 6x - 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 5t \\ 6(1 + 3t) - 2(-1 + 2t) - 3(3 - 5t) + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ x = 1 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Vậy $M = (1; -1; 3)$

c) Theo câu a, phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với $\vec{a}$ là $6x - 2y - 3z + 1 = 0$

Lại có theo câu b, tọa độ giao điểm M của d và (α) là $M(1; -1; 3)$

$\Rightarrow$ đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với $\vec{a}$ và cắt d là đường thẳng đi qua hai điểm M, A.

mà $\overrightarrow{MA} = (-1 - 1; 2 + 1; -3 - 3) = (-2; 3; -6)$

$\Rightarrow$ Δ có phương trình $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -3 - 6t \end{cases}$ $(t \in R)$

Bài 8. Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S):

$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z + 170 = 0$ và song song với hai đường thẳng:

d: $\begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = -13 + 2t \end{cases}$; d': $\begin{cases} x = -7 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = 8 \end{cases}$

Giải

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z + 170 = 0$

$\Leftrightarrow$ $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 + (z + 13)^2 = 25$

$\Rightarrow$ (S) là mặt cầu tâm $I(5; -1; -13)$, bán kính $R = 5$

Do mặt phẳng (α) song song với hai đường thẳng d, d' lần lượt có phương trình

d: $\begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = -13 + 2t \end{cases}$; d': $\begin{cases} x = -7 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = 8 \end{cases}$

$\Rightarrow$ (α) nhận $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a'}$ làm vectơ pháp tuyến trong đó $\vec{a} = (2; -3; 2)$ và $\vec{a'} = (3; -2; 0)$

$$\Rightarrow \vec{n} = \left(\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) = (4; 6; 5)$$

$\Rightarrow$ phương trình (α) có dạng $4x + 6y + 5z + D = 0$

mà (α) tiếp xúc với (S) tâm $I(5; -1; -13)$, bán kính $R = 5$

$$\Rightarrow d\left(I, (\alpha)\right) = 5 \Leftrightarrow \frac{|4.5 + 6.(-1) + 5.(-13) + D|}{\sqrt{4^2 + 6^2 + 5^2}} = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{|-51 + D|}{\sqrt{77}} = 5 \Leftrightarrow D = 51 \pm 5\sqrt{77}$$

$\Rightarrow (\alpha)$ có phương trình: $4x + 6y + 5z + 51 \pm 5\sqrt{77} = 0$

Bài 9. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm $M(1; -1; 2)$ trên mặt phẳng (α): $2x - y + 2z + 11 = 0$

Giải

Gọi d là đường thẳng đi qua M và vuông góc với (α)

$\Rightarrow$ d nhận $\vec{a} = (2; -1; 2)$ làm vectơ chỉ phương

$$\Rightarrow \text{d có phương trình: } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

Do vậy tọa độ điểm H là hình chiếu của M trên mặt phẳng (α) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t \\ 2x - y + 2z + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t \\ 2(1 + 2t) - (-1 - t) + 2(2 + 2t) + 11 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ x = -3 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow H(-3; 1; -2)$$

Bài 10. Cho điểm $M(2; 1; 0)$ và mặt phẳng (α): $x + 3y - z - 27 = 0$. Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua (α).

Giải

Gọi d là đường thẳng đi qua M và vuông góc với (α), suy ra đường thẳng d nhận vectơ $\vec{a}(1; 3; -1)$ làm vectơ chỉ phương

$\Rightarrow$ d có phương trình: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = -t \end{cases}$

Gọi H là hình chiếu của M lên (α) ⇒ tọa độ điểm H là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = -t \\ x + 3y - z - 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = -t \\ (2 + t) + 3(1 + 3t) + t - 27 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ x = 4 \\ y = 7 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow H = (4; 7; -2)$$

Do M' là điểm đối xứng với M qua (α), nên M' và M đối xứng với nhau qua H, suy ra tọa độ điểm M' là:

$$\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = 6 \\ y_{M'} = 13 \\ z_{M'} = -4 \end{cases} \Rightarrow M' = (6; 13; -4)$$

Bài 11. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng tọa độ Oxz và cắt hai đường thẳng:

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = -4 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 1 - 2t' \\ y = -3 + t' \\ z = 4 - 5t' \end{cases}$$

Giải

- Gọi (α) là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (Oxz) và chứa d.

⇒ (α) đi qua M = (0; −4; 3) và nhận $\vec{n_1} = \vec{j} \wedge \vec{a_1}$ trong đó $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{a_1} = (1; 1; -1)$ làm vectơ pháp tuyến

$$\vec{n_1} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1; 0; -1)$$

⇒ (α) có phương trình $-1(x - 0) + 0(y + 4) - 1(z - 3) = 0$ hay $x + z - 3 = 0$

- Gọi (β) là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng Oxz và chứa d'

⇒ (β) đi qua N(1; −3; 4) và nhận $\vec{n_2} = \vec{j} \wedge \vec{a_2}$ trong đó $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{a_2} = (-2; 1; -5)$ làm vectơ pháp tuyến

$$\vec{n}_2 = \left(\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -5\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & 0\\ -5 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}\right) = (-5;\ 0;\ 2)$$

$\Rightarrow$ (β) có phương trình:

$-5(x-1) + 0(y+3) + 2(z-4) = 0$ hay $-5x + 2z - 3 = 0$

Suy ra đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (Oxz) và cắt cả hai đường thẳng d và d' có phương trình

$$\begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ -5x + 2z - 3 = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = \dfrac{3}{7} \\ y = t \qquad (t \in R) \\ z = \dfrac{18}{7} \end{cases}$$

Bài 12. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A(1; −2; −5) qua đường thẳng

Δ có phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \end{cases}$

Giải

Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với Δ, suy ra (α) nhận vectơ $\vec{a} = (2; -1; 2)$ làm vectơ pháp tuyến

$\Rightarrow$ (α) có phương trình:

$2(x-1) - 1(y+2) + 2(z+5) = 0$ hay $2x - y + 2z + 6 = 0$

$\Rightarrow$ Tọa độ giao điểm I của (α) với Δ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \\ 2x - y + 2z + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \\ 2(1+2t) - (-1-t) + 2.2t + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = -1 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ I(−1; 0; −2)

Do A' là điểm đối xứng với A qua Δ $\Rightarrow$ A' đối xứng với A qua I

$\Rightarrow$ tọa độ điểm A' là: $\begin{cases} x_{A'} = 2x_I - x_A \\ y_{A'} = 2y_I - y_A \\ z_{A'} = 2z_I - z_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = -3 \\ y_{A'} = 2 \\ z_{A'} = 1 \end{cases}$

Vậy A' = (−3; 2; 1)

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG III

A. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Trong không gian Oxyz cho ba vectơ $\vec{a} = (-1;1;0)$, $\vec{b} = (1;1;0)$ và $\vec{c} = (1;1;1)$

Sử dụng giả thiết này để trả lời các câu hỏi 1, 2 và 3 sau đây.

1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

(A) $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2}$; **(B)** $\left|\vec{c}\right| = \sqrt{3}$; **(C)** $\vec{a} \perp \vec{b}$; **(D)** $\vec{b} \perp \vec{c}$.

2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) $\vec{a} . \vec{c} = 1$; **(B)** $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương;

(C) $\cos\left(\vec{b}, \vec{c}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$; **(D)** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

3. Cho hình bình hành OADB có $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (O là gốc tọa độ). Tọa độ của tâm hình bình hành OADB là:

(A) (0; 1; 0); **(B)** (1; 0; 0); **(C)** (1; 0; 1); **(D)** (1; 1; 0).

Trong không gian Oxyz cho bốn điểm A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1) và D(1; 1; 1)

Sử dụng giả thiết này để trả lời các câu hỏi 4, 5 và 6 sau đây:

4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

(A) Bốn điểm A, B, C, D tạo thành một tứ diện;

(B) Tam giác ABD là tam giác đều;

(C) AB ⊥ CD;

(D) Tam giác BCD là tam giác vuông.

5. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tọa độ điểm G là trung điểm của MN là:

(A) $G\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$; **(B)** $G\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$;

(C) $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$; **(D)** $G\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

6. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có bán kính là:

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; **(B)** $\sqrt{2}$; **(C)** $\sqrt{3}$; **(D)** $\dfrac{3}{4}$.

7. Cho mặt phẳng (α) đi qua điểm M(0; 0; −1) và song song với giá của hai vectơ $\vec{a} = (1; -2; 3)$ và $\vec{b} = (3; 0; 5)$. Phương trình của mặt phẳng (α) là:

(A) $5x - 2y - 3z - 21 = 0$; **(B)** $-5x + 2y + 3z + 3 = 0$;

(C) $10x - 4y - 6z + 21 = 0$; **(D)** $5x - 2y - 3z + 21 = 0$.

8. Cho ba điểm A(0; 2; 1), B(3; 0; 1), C(1; 0; 0). Phương trình mặt phẳng (ABC) là:

(A) $2x - 3y - 4z + 2 = 0$; **(B)** $2x + 3y - 4z - 2 = 0$;

(C) $4x + 6y - 8z + 2 = 0$; **(D)** $2x - 3y - 4z + 1 = 0$.

9. Gọi (α) là mặt phẳng cắt ba trục tọa độ tại 3 điểm M(8; 0; 0), N(0; −2; 0), P(0; 0; 4). Phương trình của (α) là:

(A) $\frac{x}{8} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{4} = 0$; **(B)** $\frac{x}{4} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$;

(C) $x - 4y + 2z = 0$; **(D)** $x - 4y + 2z - 8 = 0$.

0. Cho ba mặt phẳng (α) $x + y + 2z + 1 = 0$

(β) $x + y - z + 2 = 0$

(γ) $x - y + 5 = 0$

Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai ?

(A) (α) ⊥ (β); **(B)** (γ) ⊥ (β); **(C)** (α) // (γ); **(D)** (α) ⊥ (γ).

1. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm M(2; 0; −1) và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4; -6; 2)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là:

(A) $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$; **(B)** $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}$;

(C) $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$; **(D)** $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 - 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$

2. Cho d là đường thẳng đi qua điểm A(1; 2; 3) và vuông góc với mặt phẳng (α): $4x + 3y - 7z + 1 = 0$

Phương trình tham số của d là:

(A) $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = -2 + 3t \\ z = -3 - 7t \end{cases}$; **(B)** $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - 7t \end{cases}$;

(C) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - 7t \end{cases}$; **(D)** $\begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = -2 + 6t \\ z = -3 - 14t \end{cases}$

13. Cho hai đường thẳng

$$d_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \text{ và } \quad d_2: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 5 + 6t \\ z = 7 + 8t \end{cases}$$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) $d_1 \perp d_2$; **(B)** $d_1 // d_2$;

(C) $d_1 \equiv d_2$; **(D)** d_1 và d_2 chéo nhau.

4. Cho mặt phẳng (α): $2x + y + 3z + 1 = 0$ và đường thẳng d có phương trình tham số: $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) $d \perp (\alpha)$; **(B)** d cắt (α); **(C)** $d // (\alpha)$; **(D)** $d \subset (\alpha)$.

5. Cho (S) là mặt cầu tâm $I(2; 1; -1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (α) có phương trình: $2x - 2y - z + 3 = 0$. Bán kính của (S) là:

(A) 2; **(B)** $\frac{2}{3}$; **(C)** $\frac{4}{3}$; **(D)** $\frac{2}{9}$

B.ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	**(D)**	**(C)**	**(A)**	**(D)**	**(D)**	**(A)**	**(B)**	**(B)**	**(D)**	**(C)**

Câu	11	12	13	14	15
Đáp án	**(C)**	**(B)**	**(B)**	**(D)**	**(A)**

C. HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có $\vec{b} = (1;1;0)$, $\vec{c} = (1;1;1)$

$\Rightarrow \vec{b}.\vec{c} = 1.1 + 1.1 + 0.1 = 2 \neq 0$

$\Rightarrow \vec{b}, \vec{c}$ không vuông góc với nhau. Suy ra **(D)** là đáp án cần tìm.

Ta có

$$\cos\left(\vec{b}, \vec{c}\right) = \frac{\vec{b}.\vec{c}}{\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|} = \frac{1.1 + 1.2 + 0.1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}.\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Vậy (C) là đáp án cần tìm.

3. Ta có $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (-1;1;0)$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (1;1;0)$

$\Rightarrow A = (-1;\ 1;\ 0),\ B = (1;\ 1;\ 0)$

$\Rightarrow$ Tâm I hình bình hành OADB là trung điểm AB

$$\Rightarrow I = \left(\frac{-1+1}{2};\frac{1+1}{2};\frac{0+0}{2}\right) = (0;\ 1;\ 0)$$

Vậy **(A)** là đáp án cần tìm.

4. Ta có $\overrightarrow{BC} = (0;-1;1) \Rightarrow BC = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{BD} = (1;0;1) \Rightarrow BD = \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{CD} = (1;1;0) \Rightarrow CD = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{2}$

$\Rightarrow BC = BD = CD \Rightarrow \Delta BCD$ là tam giác đều $\Rightarrow \Delta BCD$ **không vuông.**

Vậy **(D)** là đáp án cần tìm.

5. Ta có M là trung điểm AB nên $M = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$

N là trung điểm CD nên $N = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$

G là trung điểm MN nên $G = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Vậy **(D)** là đáp án cần tìm

6. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD

(S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Vì (S) đi qua 4 điểm A, B, C, D nên:

$$\begin{cases} 1 - 2a + d = 0 \\ 1 - 2b + d = 0 \\ 1 - 2c + d = 0 \\ 1 + 1 + 1 - 2a - 2b - 2c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow (S): x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

⇒ mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có bán kính $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy **(A)** là đáp án cần tìm.

7. Ta có $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-10; 4; 6)$

⇒ (α) có phương trình $-10(x - 0) + 4(y - 0) + 6(z + 1) = 0$ hay $-5x + 2y + 3z + 3 = 0$

Vậy **(B)** là đáp án cần tìm.

8. Ta thấy

$$\begin{cases} 2.1 + 3.0 - 4.0 - 2 = 0 \\ 2.3 + 3.0 - 4.1 - 2 = 0 \\ 2.0 + 3.2 - 4.1 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (ABC): 2x + 3y - 4z - 2 = 0$$

Vậy **(B)** là đáp án cần tìm.

9. Do (α) đi qua M(8; 0; 0), N(0; −2; 0), P(0; 0; 4) nên (α) có phương trình

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{4} = 1 \text{ hay } x - 4y + 2z = 8$$

Vậy **(D)** là đáp án cần tìm.

10. Ta có (α) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha} = (1; 1; 2)$

(γ) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\gamma} = (1; -1; 0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} . \overrightarrow{n_\gamma} = 1.1 + 1.(-1) + 2.0 = 0$

⇒ (α) ⊥ (γ) ⇒ **(C)** là đáp án cần tìm.

11. Do Δ đi qua M(2; 0; −1) và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a} = (4; -6; 2)$

$$\Rightarrow \Delta \text{ có phương trình: } \begin{cases} x = 2 + 4t' \\ y = -6t' \\ z = -1 + 2t' \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Vậy **(C)** là đáp án cần tìm.

12. Do d đi qua A(1; 2; 3) và vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $4x + 3y - 7z + 1 = 0$

⇒ d nhận $\overrightarrow{a} = (4; 3; -7)$ làm vectơ chỉ phương

$$\Rightarrow d \text{ có phương trình } \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - 7t \end{cases} \Rightarrow \textbf{(B)} \text{ là đáp án cần tìm.}$$

13 Ta có d_1 đi qua $A_1 = (1;\ 2;\ 3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{\mathbf{a}_1} = \mathbf{(2;3;4)}$

d_2 đi qua $A_2 = (3;\ 5;\ 7)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_2} = \mathbf{(4;6;8)}$

Do $\overrightarrow{a_1} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{a_2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d_1 \parallel d_2 \\ d_1 \equiv d_2 \end{array}\right.$

Lại có điểm $A_1 \notin d_2 \Rightarrow d_1 \parallel d_2$

Vậy **(B)** là đáp án cần tìm.

14 Ta có (α) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (2;1;3)$

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (1;-2;0)$

do $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u} = 2.1 + 1.(-2) + 3.0 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d \parallel (\alpha) \\ d \subset (\alpha) \end{array}\right.$

Lại có điểm $A(-3;\ 2;\ 1)$ thuộc d cũng thuộc $(\alpha) \Rightarrow \mathbf{d \subset (\alpha)}$

Vậy **(D)** là đáp án cần tìm.

15. Ta có

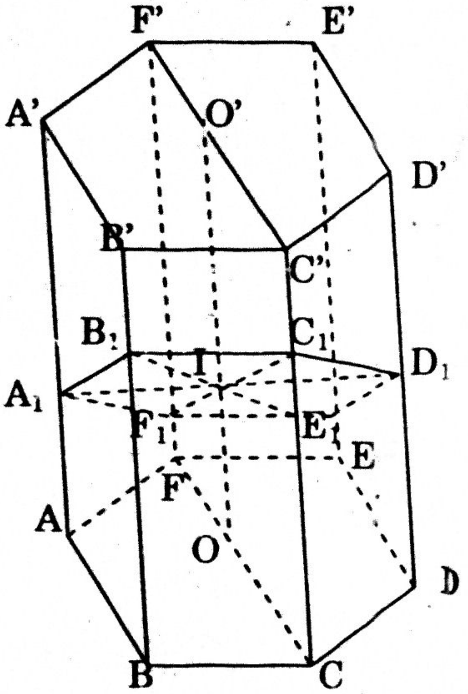
$$r = d\left(I,(\alpha)\right) = \frac{|2.2 - 2.1 - (-1) + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{3} = 2$$

Vậy **(A)** là đáp án cần tìm.

ÔN TẬP CUỐI NĂM

Bài 1. Cho lăng trụ lục giác đều ABCDEF.A'B'C'D'E'F', O và O' là tâm đường tròn ngoại tiếp hai đáy, mặt phẳng (P) đi qua trung điểm của OO' và cắt cạnh bên của lăng trụ. Chứng minh rằng (P) chia lăng trụ đã cho thành hai đa diện có thể tích bằng nhau.

Giải



Gọi I là trung điểm OO'

Gọi A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 lần ượt là giao của mặt phẳng (P) với ác cạnh bên của lăng trụ.

Do ABCDEF.A'B'C'D'E'F' là ăng trụ đều nên phép đối xứng âm I biến đa diện.

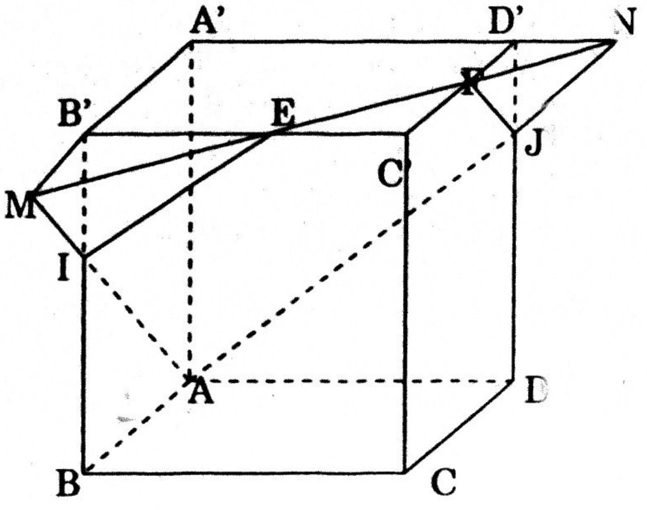
$ABCDEF.A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ thành a diện.

$D'E'P'A'B'C'.D_1E_1F_1A_1B_1C_1$

$\Rightarrow V_{ABCDEF.A_1B_1C_1D_1E_1F_1} = V_{D'E'F'A'B'C'.D_1E_1F_1A_1B_1C_1}$

Bài 2. Cho khối lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của B'C' và C'D'. Mặt phẳng (AEF) chia khối lập phương đó thành hai khối đa diện (H) và (H') trong đó (H) là khối đa diện chứa đỉnh A'. Tính thể tích của (H).

Giải



Kéo dài EF cắt A'B' và A'D' ần lượt tại M và N

Nối M với A cắt BB' tại I,

N với A cắt DD' tại J.

Do ABCD.A'B'C'D' là khối lập hương cạnh a và E, F là trung iểm của B'C' và C'D' nên:

$$B'M = D'N = \frac{a}{2};\ B'I = D'J = \frac{a}{3}$$

Khi đó mặt phẳng (AEF) chia hối lập phương thành hai khối a diện (H) và (H'), trong đó (H) à khối đa diện chứa điểm A' nên I là khối A'B'IAJFD'

Ta đặt V là thể tích khối đa diện (H)

V_1 là thể tích khối chóp N.A'MA

V_2 là thể tích khối chóp ND'FJ, V_3 là thể tích khối chóp FMIB'

$\Rightarrow V = V_1 - (V_2 + V_3)$

Mà $V_1 = \frac{1}{3}dt(\Delta A'MA).A'N = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.A'N.AA'.A'N$

$= \frac{1}{6}.\frac{3a}{2}.a.\frac{3a}{2} = \frac{3a^3}{8}$ (đvdt)

$V_2 = \frac{1}{3}dt(\Delta FD'J).D'N = \frac{1}{6}.D'J.D'F.D'N$

$= \frac{1}{6}.\frac{a}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^3}{72}$ (đvdt)

$V_3 = \frac{1}{3}dt(\Delta B'IM).B'H = \frac{1}{3}.\frac{a}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^3}{72}$ (đvdt)

$\Rightarrow V = \frac{3a^3}{8} - \frac{a^3}{72} - \frac{a^3}{72} = \frac{25a^3}{72}$

Bài 3. Cho mặt cầu (S) tâm O bán kính r. Hình nón có đường tròn đáy (C) và đỉnh I đều thuộc (S) được gọi là hình nón nội tiếp mặt cầu (S). Gọi h là chiều cao của hình nón đó.

a) Tính thể tích của hình nón theo r và h.

b) Xác định h để thể tích của hình nón là lớn nhất.

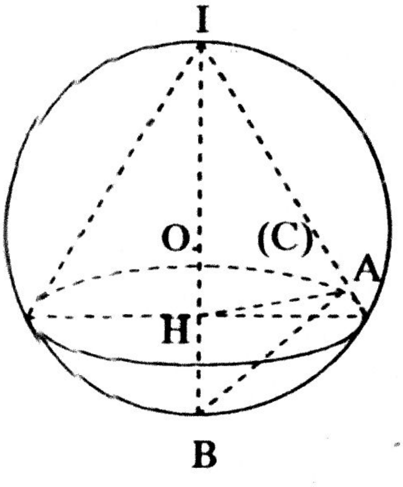
Giải

a) Gọi H là tâm đường tròn (C), IB là đường kính của mặt cầu.

$\Rightarrow H, O \in IB$

Lấy A là 1 điểm trên (C)

$\Rightarrow$ tam giác IHA đồng dạng tam giác IAB



$\Rightarrow \frac{IH}{IA} = \frac{IA}{IB}$

$\Rightarrow IA^2 = IH.IB = h.2r = 2rh$

lại có $IA^2 = IH^2 + HA^2$

$\Rightarrow HA^2 = IA^2 - IH^2 = 2rh - h^2 = h(2r - h)$

$\Rightarrow$ Đường tròn (C) có bán kính $R = \sqrt{h(2r - h)}$

$\Rightarrow$ Thể tích của hình nón là:

$$V = \frac{1}{3}\pi.R^2.h = \frac{1}{3}\pi.h(2R - h)h = \frac{1}{3}\pi(2r - h)h^2$$

b) Do 2r > h, áp dụng bất đẳng thức cô-si cho bộ 3 số:

$(2r-h), \frac{h}{2}, \frac{h}{2}$ ta có

$$\left((2r-h)+\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right) \geq 3\sqrt[3]{(2r-h).\frac{h}{2}.\frac{h}{2}}$$

$$\Leftrightarrow (2r-h).\frac{h}{2}.\frac{h}{2} \leq (2r)^3.\frac{1}{27} \Leftrightarrow \frac{4\pi}{3}(2r-h)\frac{h^2}{4} \leq \frac{32}{27}r^3$$

Hay $V \leq \frac{32}{81}r^3$

$\Rightarrow \text{MaxV} = \frac{32r^3}{81}$ khi $2r - h = \frac{h}{2} \Leftrightarrow h = \frac{4r}{3}$

Bài 4. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm A(1; 2; –1), B(7; –2; 3) và đường thẳng d có phương trình: $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 2-2t \\ z = 2+2t \end{cases}$

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng d và AB cùng nằm trong một mặt phẳng.

b) Tìm điểm I trên d sao cho AI + BI nhỏ nhất.

Giải

a) Ta có: d đi qua M(–1; 2; 2) và nhận $\vec{a} = (3; -2; 2)$ làm vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (6; -4; 4) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 2\vec{a} \Rightarrow d \parallel AB$

$\Rightarrow$ AB và d đồng phẳng

b) Theo câu a) AB // d $\Rightarrow$ A, B nằm về 1 phía đối với d trên mặt phẳng (A, d). Gọi A' là điểm đối xứng với A qua d, (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với d.

$\Rightarrow (\alpha)$ có phương trình $3(x-1) - 2(y-2) + 2(z+1) = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 2y + 2z + 3 = 0$

$\Rightarrow$ Tọa độ giao điểm H của (α) và d là nghiệm hệ: $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 2-2t \\ z = 2+2t \\ 3x-2y+2z+3=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1+3t \\ y = 2-2t \\ z = 2+2t \\ 3(-1+3t)-2(2-2t)+2(2+2t)+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ x = -1 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow H(-1; 2; 2$$

$\Rightarrow$ A' và A đối xứng với nhau qua $H \equiv M = (-1; 2; 2)$

⇒ Tọa độ A' là: $\begin{cases} x = 2.(-1) - 1 \\ y = 2.2 - 2 \\ z = 2.2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \\ z = 5 \end{cases} \Rightarrow A'(-3; 2; 5)$

$\overrightarrow{A'B} = (10; -4; -2)$

⇒ A'B có phương trình $\begin{cases} x = -3 + 10t' \\ y = 2 - 4t' \\ z = 5 - 2t' \end{cases}$

Khi đó tọa độ điểm I trên d sao cho AI + BI nhỏ nhất là tọa độ giao điểm của d và A'B

Xét hệ $\begin{cases} -1 + 3t = 10t' - 3 \\ 2 - 2t = 2 - 4t' \\ 2 + 2t = 5 - 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t - 10t' = -2 \\ t = 2t' \\ 2t + 2t' = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I = (2; 0; 4)$

Vậy I = (2; 0; 4) là điểm cần tìm.

Lưu ý: Câu b ta có thể làm như sau:

Do AB // d, gọi (β) là mặt phẳng trung trực của AB ⇒ (β) đi qua J (4;0;1) và nhận $\overrightarrow{AB} = (3; -2; 2)$ làm vectơ pháp tuyến.

⇒ (β) có phương trình: $3(x - 4) - 2(y - 0) + 2(z - 1) = 0$

Hay $3x - 2y + 2z - 14 = 0$

Tọa độ điểm I cần tìm là nghiệm của hệ phương trình (β) với d hay là nghiệm hệ: $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 + 2t \\ 3x - 2y + 2z - 14 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 + 2t \\ 3(-1 + 3t) - 2(2 - 2t) + 2(2 + 2t) - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 2 \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$$

Vậy I = (2; 0; 4)

Bài 5. Cho tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết rằng AC = AD = 4cm, AB = 3cm, BC = 5cm.

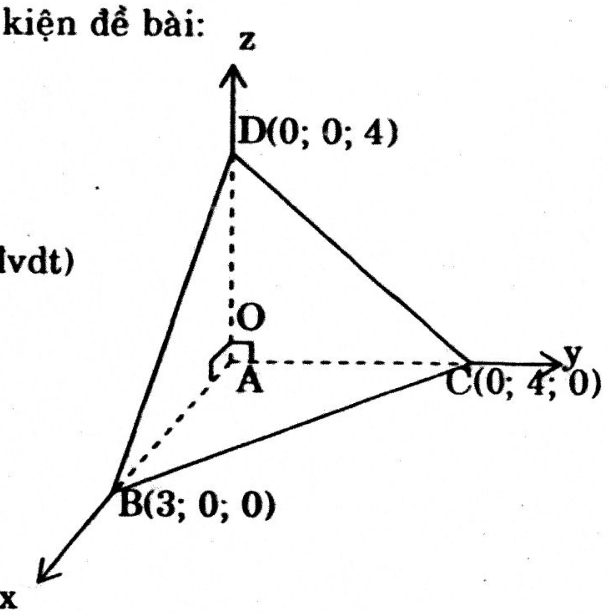
a) Tính thể tích tứ diện ABCD.

b) Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (BCD).

Giải

Chọn hệ trục Oxyz (hình vẽ) trong đó A ≡ O (0; 0; 0), B(3; 0; 0), C(0; 4; 0), D(0; 0; 4)

Khi đó tứ diện ABCD thỏa mãn điều kiện đề bài:



a) Ta có:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}BA.(dt\Delta ABC)$$

$$= \frac{1}{6}DA.AB.AC = \frac{1}{6}4.3.4 = r \text{ (đvdt)}$$

b) Ta có: $\overrightarrow{BC} = (-3; 4; 0)$

$\overrightarrow{BD} = (-3; 0; 4)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \left(\begin{vmatrix}4 & 0\\0 & 4\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & -3\\4 & -3\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-3 & 4\\-3 & 0\end{vmatrix}\right)$$

$$= (16; 12; 12) = 4(4; 3; 3)$$

$\Rightarrow$ (BCD) nhận $\overrightarrow{n} = (4; 3; 3)$ làm vectơ pháp tuyến và đi qua B (3; 0; 0)

$\Rightarrow$ (BCD) có phương trình

$4(x - 3) + 3y + 3z = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y + 3z - 12 = 0$

Do đó khoảng cách từ A tới (BCD) là:

$$d(A,(BCD)) = \frac{|4.0 + 3.0 + 3.0 - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 3^2}} = \frac{12}{\sqrt{34}}$$

Bài 6. Trong không gian Oxyz cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$

a) Tính diện tích mặt cầu (S) và thể tích khối cầu tương ứng.

b) Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (Oxy) theo đường tròn (C). Xác định tâm và bán kính của (C).

c) Tính diện tích xung quanh của hình trụ nhận (C) làm đáy và chiều cao là $a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối trụ tương ứng.

Giải

a) Ta có mặt cầu (S) có tâm $I \equiv O(0; 0; 0)$, bán kính $R = 2a$

$\Rightarrow$ diện tích của mặt cầu là: $S_{\text{mặt cầu}} = 4\pi R^2 = 4.\pi.4a^2 = 16\pi a^2$

Thể tích của khối cầu tương ứng là: $V = \frac{4}{3}\pi.R^3 = \frac{4}{3}\pi(2a)^3 = \frac{32}{3}\pi a^3$

b) Do (S) là mặt cầu tâm $I \equiv O(0; 0; 0) \Rightarrow$ (S) cắt mặt phẳng Oxy theo một đường tròn lớn (C) tâm I (0; 0; 0), bán kính R = 2a

c) Diện tích xung quanh của hình trụ nhận (C) làm đáy và chiều cao là $a\sqrt{3}$ là: $S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi.2a.a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\pi a^2$ (đvdt)

Thể tích của khối trụ tương ứng là:

$V = \pi R^2 h = \pi(2a)^2.a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\pi a^3$ (đvdt)

Bài 7. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình: $d_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = t' \end{cases}$

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa d_1 và song song với d_2.

Giải

a) Ta có d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{a}_1 = (-1; 1; -1)$

d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{a}_2 = (2; 1; 1)$

$\Rightarrow \vec{a}_1 \neq k\vec{a}_2 \Rightarrow d_1$ và d_2 cắt nhau hoặc chéo nhau.

Xét hệ: $\begin{cases} 1 - t = 2t' \\ t = -1 + t' \\ -t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - t = 2t' \\ t = -1 + t \\ t = -t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -t' \\ -t' = -1 + t' \\ 1 - t' = 2t' \end{cases}$ (vô lý)

$\Rightarrow d_1$ và d_2 chéo nhau.

b) ta có: $\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2; -1; -3)$

Do (α) là mặt phẳng chứa d_1 và song song với d_2 nên mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1; 0; 0)$ và nhận vectơ $\vec{n} = \vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 = (2; -1; -3)$ làm vectơ pháp tuyến. Suy ra (α) có phương trình:

$$2(x - 1) - 1(y - 0) - 3(z - 0) = 0 \text{ hay } 2x - y - 3z - 2 = 0$$

Bài 8. Trong không gian Oxyz cho các điểm $A(1; 0; -1)$, $B(3; 4; -2)$, $C(4; -1; 1)$, $D(3; 0; 3)$

a) Chứng minh rằng A, B, C, D không đồng phẳng.

b) Viết phương trình mặt phẳng (ABC) và tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (ABC).

c) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

d) Tính thể tích tứ diện ABCD.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; 4; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (3; -1; 2)$, $\overrightarrow{AD} = (2; 0; 4)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right) = (7; -7; -14)$

a) Do $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD} = 7.2 - 7.0 - 14.4 = -42 \neq 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng hay A, B, C, D không đồng phẳng.

b) Ta có mặt phẳng (ABC) đi qua điểm A(1; 0; –1) và nhận vectơ $\vec{n} = \frac{1}{7}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = (1; -1; -2)$ làm vectơ pháp tuyến.

$\Rightarrow$ (ABC) có phương trình:

$1(x - 1) - 1(y - 0) - 2(z + 1) = 0$ hay $x - y - 2z - 3 = 0$

- Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (ABC) là:

$$d(D,(ABC)) = \frac{|3 - 6 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \text{ (đvdt)}$$

c) Giả sử (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD

$\Rightarrow$ (S) có phương trình dạng:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

Do (S) đi qua A, B, C, D nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (1 - a)^2 + (0 - b)^2 + (-1 - c)^2 = R^2 \\ (3 - a)^2 + (4 - b)^2 + (-2 - c)^2 = R^2 \\ (4 - a)^2 + (-1 - b)^2 + (1 - c)^2 = R^2 \\ (3 - a)^2 + (0 - b)^2 + (3 - c)^2 = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 8b - 2c = 27 \\ 2a - 10b + 6c = -11 \\ 8b - 6c = 13 \\ (3 - a)^2 + b^2 + (3 - c)^2 = R^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = \frac{1}{2} \\ R^2 = \frac{41}{4} \end{cases} \Rightarrow \text{(S) có phương trình } (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{41}{4}$$

Bài 9. Trong không gian Oxyz cho bốn điểm A(2; 4; –1), B(1; 4; –1), C(2; 4; 3), D(2; 2; –1)

a) Chứng minh rằng các đường thẳng AB, AC, AD vuông góc với nhau đôi một. Tính thể tích khối tứ diện ABCD.

b) Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua 4 điểm A, B, C, D.

c) Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song với mặt phẳng (ABD).

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0; 0; 4)$, $\overrightarrow{AD} = (0; 2; 0)$

a) Do $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -1.0 + 0.0 + 0.4 = 0$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = -1.0 + 0.2 + 0.0 = 0$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = 0.0 + 0.2 + 4.0 = 0$$

=> AB, AC, AD vuông góc vớinhau đôi một.

- Thể tích khối tứ diện ABCD là:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.AD = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}.1.4.2 = \frac{4}{3} \quad \text{(đvdt)}$$

b) Giả sử (S) có phương trình: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$

Do (S) đi qua 4 điểm A, B, C, D nên ta có hệ:

$$\begin{cases}(2 - a)^2 + (4 - b)^2 + (-1 - c)^2 = R^2\\(1 - a)^2 + (4 - b)^2 + (-1 - c)^2 = R^2\\(2 - a)^2 + (4 - b)^2 + (3 - c)^2 = R^2\\(2 - a)^2 + (2 - b)^2 + (-1 - c)^2 = R^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = \dfrac{3}{2}\\c = 1\\b = 3\\R^2 = \dfrac{21}{4}\end{cases}$$

=> (S) có phương trình: $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = \frac{21}{4}$

c) Do AB, AC, AD vuông góc với nhau đôi một nên AC ⊥ (ABD)

=> mặt phẳng (α) song song với (ABD) nhận $\overrightarrow{AC} = (0; 0; 4)$ làm vectơ pháp tuyến ⇒ (α) có dạng 4z + D = 0

Do (α) tiếp xúc (S) ⇒ Khoảng cách từ tâm $I\left(\frac{3}{2}; 3; 1\right)$ đến (α) bằng bán kính $R = \frac{\sqrt{21}}{2} \Rightarrow \frac{|4.1 + D|}{4} = \frac{\sqrt{21}}{2} \Rightarrow |4 + D| = 2\sqrt{21}$

$\Rightarrow D = -4 \pm 2\sqrt{21} \Rightarrow$ (α) có dạng $4z - 4 \pm 2\sqrt{21} = 0$ hay $2z - 2 \pm \sqrt{21} = 0$

Bài 10. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng d: $\begin{cases}x = 1 - 2t\\y = 2 + t\\z = 3 - t\end{cases}$ và mặt phẳng (α): **2x + y + z = 0**

a) Tìm tọa độ giao điểm A của d và (α).

b) Viết phương trình mặt phẳng (β) qua A và vuông góc với d.

Giải

a) Tọa độ giao điểm A của d và (α) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x = 1 - 2t\\y = 2 + t\\z = 3 - t\\2x + y + z = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1 - 2t\\y = 2 + t\\z = 3 - t\\2(1 - 2t) + 2 + t + 3 - t = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{7}{4} \\ x = -\dfrac{5}{2} \\ y = \dfrac{15}{4} \\ z = \dfrac{5}{4} \end{cases}. \text{ Vậy } A = \left(-\frac{5}{2}; \frac{15}{4}; \frac{5}{4}\right)$$

b) Mặt phẳng (β) qua A và vuông góc với d, nên (β) nhận $\vec{a} = (-2; 1; -1)$ làm vectơ pháp tuyến.

$\Rightarrow$ (β) có phương trình: $-2\left(x + \dfrac{5}{2}\right) + \left(y - \dfrac{15}{4}\right) - \left(z - \dfrac{5}{4}\right) = 0$

Hay $-2x + y - z - \dfrac{15}{2} = 0$

Bài 11. Trong không gian Oxyz cho các điểm A(−1; 2; 0), B(−3; 0; 2), C(1; 2; 3), D(0; 3; −2).

a) Viết phương trình mặt phẳng (ABC) và phương trình tham số của đường thẳng AD.

b) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa AD và song song với BC

Giải

Ta có: Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; -2; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (2; 0; 3)$, $\overrightarrow{AD} = (1; 1; -2)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right) = (-6; 10; 4)$$

a) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm A(−1; 2; 0) và nhận vectơ $\vec{n} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = (-3; 5; 2)$ làm vectơ pháp tuyến.

$\Rightarrow$ (ABC) có phương trình:

$-3(x + 1) + 5(y - 2) + 2z = 0$ hay $-3x + 5y + 2z - 13 = 0$

Đường thẳng AD nhận $\overrightarrow{AD} = (1; 1; -2)$ làm vectơ chỉ phương nên AD có phương trình tham số: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

b) Ta có $\overrightarrow{BC} = (4; 2; 1)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{BC} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\right) = (5; -9; -2)$$

Do (α) là mặt phẳng chứa AD và song song với BC, nên (α) đi qua điểm $A(-1; 2; 0)$ và nhận $\vec{n} = \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{BC}$ làm vectơ pháp tuyến, suy ra (α) có phương trình:

$$5(x + 1) - 9(y - 2) - 2z = 0 \Leftrightarrow 5x - 9y - 2z + 23 = 0$$

Bài 12. Trong không gian Oxyz cho bốn điểm $A(3; -2; -2)$, $B(3; 2; 0)$, $C(0; 2; 1)$ và $D(-1; 1; 2)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (BCD). Suy ra ABCD là một tứ diện.

b) Viết phương trình mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCD).

c) Tìm tọa độ tiếp điểm của (S) và mặt phẳng (BCD).

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{BC} = (-3; 0; 1)$, $\overrightarrow{BD} = (-4; -1; 2)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\left(\begin{vmatrix}0 & 1\\-1 & 2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & -3\\2 & -4\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-3 & 0\\-4 & -1\end{vmatrix}\right) = (1; 2; 3)$$

Suy ra mặt phẳng (BCD) đi qua $B(3; 2; 0)$ và nhận $\vec{n} = (1; 2; 3)$ làm vectơ pháp tuyến, do đó mặt phẳng (BCD) có phương trình:

$$1(x - 3) + 2(y - 2) + 3(z + 0) = 0 \text{ hay } x + 2y + 3z - 7 = 0$$

Ta có: $3 + 2(-2) + 3.(-2) - 7 = -14 \neq 0 \Rightarrow A \notin (BCD)$

Vậy ABCD là một tứ diện.

b) Ta có: $d(A, (BCD)) = \dfrac{|3 + 2(-2) + 3.(-2) - 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \dfrac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$

$\Rightarrow$ **mặt cầu (S) tâm $A(3; -2; -2)$ và tiếp xúc với (BCD) là mặt cầu có bán kính** $R = \sqrt{14}$

$\Rightarrow$ (S) **có phương trình:** $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z + 2)^2 = 14$

c) Gọi **d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (BCD)**

$\Rightarrow$ d nhận $\vec{a} = (1; 2; 3)$ làm vectơ chỉ phương.

Suy ra d có phương trình: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$

Do đó tọa độ tiếp điểm của (S) và mặt phẳng (BCD) là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = -2 + 3t \\ x + 2y + 3z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = -2 + 3t \\ 3 + t + 2(-2 + 2t) + 3(-2 + 3t) - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 4 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{ tọa độ tiếp điểm là } M(4;\ 0;\ 1)$$

Bài 13. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng:

$$d_1: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad \text{và } d_2: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$$

a) Chứng minh d_1 và d_2 cùng thuộc một mặt phẳng.

b) Viết phương trình mặt phẳng đó.

Giải

Ta có d_1 đi qua $M_1(-1;\ 1;\ 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}_1\,(3;\ 2;\ -2)$

d_2 đi qua $M_2\ (0;\ 1;\ -3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}_2(1;\ 1;\ 2)$

$$\vec{n} = \vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (6; -8; 1)$$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_1 và song song với d_2, suy ra (α) đi qua M_1 và nhận $\vec{n}$ làm vectơ pháp tuyến.

Do đó (α) có phương trình:

$6(x + 1) - 8(y - 1) + (z - 3) = 0$ hay $6x - 8y + z + 11 = 0$

a) Do $6.0 - 8.1 - 3 + 11 = 0 \Rightarrow M_2 \in (\alpha)$

$\Rightarrow d_1$ và d_2 cùng thuộc một mặt phẳng.

b) Phương trình mặt phẳng đó là: $6x - 8y + z + 11 = 0$

Lưu ý: ta cũng có thể làm như sau:

- Ta chứng minh d_1 và d_2 cắt nhau, suy ra d_1, d_2 thuộc cùng mặt phẳng.
- Viết phương trình mặt phẳng (d_1, d_2)

Bài 14. Trong không gian cho ba điểm A, B, C

a) Xác định điểm G sao cho $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

b) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = k^2$, với k là hằng số.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{BC}$$

Suy ra G là điểm nằm trên đường thẳng qua A và song song với đường thẳng BC và $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{BC}$

b) Với điểm G thỏa mãn điều kiện câu a, ta có:

$MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = k^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 - 2\overrightarrow{MC}^2 = k^2$

$\Rightarrow (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 - 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 = k^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GA}^2 + 2\overrightarrow{GB}^2 - 2\overrightarrow{GC}^2 = k^2$

$\Rightarrow MG^2 = k^2 + 2GC^2 - 2GB^2 - GA^2$

- Nếu $k^2 + 2GC^2 - 2GB^2 - GA^2 > 0$

$\Rightarrow MG = \sqrt{k^2 + 2GC^2 - 2GB^2 - GA^2}$

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm G, bán kính

$R = \sqrt{k^2 + 2GC^2 - 2GB^2 - GA^2}$

- Nếu $k^2 + 2GC^2 - 2GB^2 - GA^2 = 0$

$\Rightarrow MG = 0 \Rightarrow$ Tập điểm M là điểm G.

- Nếu $k^2 + 2GC^2 - 2GB^2 - GA^2 < 0 \Rightarrow$ tập điểm M là tập rỗng.

Bài 15. Cho hai đường thẳng chéo nhau:

$$d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \text{và } d': \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

a) Viết phương trình các mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau và lần lượt chứa d và d'.

b) Lấy hai điểm $M(2; -1; 1)$ và $M'(2; 0; 1)$ lần lượt trên d và d'. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (β) và khoảng cách từ điểm M' đến mặt phẳng (α). So sánh hai khoảng cách đó.

Giải

a) ta có d đi qua điểm $A(2; -1; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-1; 1; -1)$,

d' đi qua điểm $B(2; 0; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}\,' = (2; 1; 1)$

$$\Rightarrow \vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}\,' = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2; -1; -3)$$

Mặt phẳng (α) chứa d và song song với d' là mặt phẳng đi qua A và nhận $\vec{n}$ làm vectơ pháp, suy ra (α) có phương trình:

$2(x - 2) - 1(y + 1) - 3(z - 1) = 0$ hay $2x - y - 3z - 2 = 0$

Mặt phẳng (β) chứa d' và song song với d là mặt phẳng đi qua điểm B và nhận $\vec{n}$ làm vectơ pháp tuyến, suy ra (β) có phương trình:

$$2(x - 2) - 1(y - 0) - 3(z - 1) = 0 \text{ hay } 2x - y - 3z - 1 = 0$$

b) Ta có: $d(M,(\beta)) = \dfrac{|2.2 - 1(-1) - 3.1 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$

$$d(M',(\alpha)) = \frac{|2.2 - 1.0 - 3.1 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$\Rightarrow d(M, (\beta)) = d(M,(\alpha))$

Bài 16. Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng (α) có phương trình: $4x + y + 2z + 1 = 0$ và mặt phẳng (β) có phương trình: $2x - 2y + z - 3 = 0$

a) Chứng minh rằng (α) cắt (β).

b) Viết phương trình tham số của đường thẳng d là giao của (α) và (β).

c) Tìm điểm M' đối xứng với điểm M(4; 2; 1) qua mặt phẳng (α)

d) Tìm điểm N' đối xứng với điểm N(0; 2; 4) qua đường thẳng d.

Giải

a) ta có (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (4; 1; 2)$

(β) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (2; -2; 1)$

Do $\vec{n}_1 \neq k\vec{n}_2 \Rightarrow$ (α) và (β) cắt nhau.

b) Ta có $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \right) = (5; 0; -10)$

Nhận thấy $A\left(-\frac{1}{2}; 1; 0\right)$ thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng (α) và (β).

Suy ra d đi qua A và nhận $\vec{a} = \frac{1}{5}(\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2) = (1; 0; -2)$ làm vectơ chỉ phương

$$\Rightarrow d \text{ có phương trình } \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} + t \\ y = 1 \\ z = -2t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

c) Gọi Δ là đường thẳng qua M(4; 2; 1) và vuông góc với (α)

$$\Rightarrow \Delta \text{ có phương trình } \begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Gọi H là giao điểm của Δ và (α). Xét hệ:

$$\begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \\ 4x + y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \\ 4(4 + 4t) + 2 + t + 2(1 + 2t) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow H(0; 1; -1)$$

⇒ điểm M' là ảnh của điểm M qua phép đối xứng qua mặt phẳng (α) là điểm đối xứng của M qua H. Do vậy tọa độ điểm M' là:

$$\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = -4 \\ y_{M'} = 0 \\ z_{M'} = -3 \end{cases} \Rightarrow M'(-4; 0; -3)$$

d) Gọi (γ) là mặt phẳng qua N(0; 2; 4) và vuông góc với d.

⇒ (γ) có phương trình:

$1(x - 0) + 0(y - 2) - 2(z - 4) = 0$ hay $x - 2z + 8 = 0$

Gọi I là giao của (γ) và d. Xét hệ:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} + t \\ y = 1 \\ z = -2t \\ x - 2z + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{3}{2} \\ x = -2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Suy ra I = (−2; 1; 3)

Do N' là ảnh của N qua phép đối xứng trục d, nên tọa độ điểm N' là:

$$\begin{cases} x_{N'} = 2x_I - x_N \\ y_{N'} = 2y_I - y_N \\ z_{N'} = 2z_I - z_N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{N'} = -4 \\ y_{N'} = 0 \\ z_{N'} = 2 \end{cases} \Rightarrow N'(-4; 0; 2)$$

MỤC LỤC

Lời nói đầu

Chương I. KHỐI ĐA DIỆN

§1. Khái niệm về khối đa diện 5
§2. Khối đa diện lồi và khối đa diện đều 7
§3. Khái niệm về thể tích của khối đa diện 10
Ôn tập chương I 15
Câu hỏi trắc nghiệm chương I 23

Chương II. MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

§1. Khái niệm về mặt tròn xoay 27
§2. Mặt cầu 36
Ôn tập chương II 42
Câu hỏi trắc nghiệm chương II 45

Chương III. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. Hệ tọa độ trong không gian 52
§2. Phương trình mặt phẳng 57
§3. Phương trình đường thẳng trong không gian 66
Ôn tập chương III 75
Câu hỏi trắc nghiệm chương III 84
Ôn tập cuối năm 91